

# 双光子过程光子统计

何 林 生

(中国科学院安徽光学精密机械研究所)

## 提 要

本文研究了二能级系统一般布居情况下双光子过程的光子统计。推广了生成函数法,导出了含参数  $r$  (原子布居数比) 的生成函数的偏微分方程,阶乘矩  $\langle n^{(k)} \rangle$  和相关函数  $g^{(k)}$  的运动方程;分别求解了它们在各种  $r$  值情况下的解析解。给出了三类初始光场  $\langle n \rangle$  和  $g^{(2)}$  随约化时间  $\tau$  和  $r$  变化曲线。讨论了  $r$  对光子反聚束效应的影响和双光子放大器的光子统计特性。本文认为:可以用光子超聚束效应作为双光子放大的判据之一。

## 一、引 言

许多作者仅研究过二能级系统双光子吸收过程或双光子发射过程的光子统计<sup>[1, 2~5]</sup>, 讨论过纯双光子吸收过程中呈现光子反聚束(Antibunching)效应的情况, 尚未有人用比较严密的解析方法, 研究二能级系统态分布比  $r$  为任意(既有双光子吸收又有双光子发射)情况下值的光子统计变化, 及  $r$  对光子反聚束效应的影响, 本文将讨论这些问题。

## 二、光子密度矩阵元运动方程

考虑一个二能级系统, 设光场的强度不足以显著改变系统热平衡状态; 或即使光场较强, 但只能维持上下能级粒子分布不变; 不考虑光学跃迁之外的其它损耗机制。在玻恩近似和马尔珂夫近似下, 双光子过程光子密度算符主方程为<sup>[1, 2]</sup>

$$\begin{aligned} d\rho/dt = K \{ \rho_{A_i}(0) ([a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ \rho(t), a_{k_1} a_{k_2}] + [a_{k_1}^+ a_{k_2}^+, \rho(t) a_{k_1} a_{k_2}]) \\ + \rho_{A_i}(0) ([a_{k_1} a_{k_2} \rho(t), a_{k_1}^+ a_{k_2}^+] + [a_{k_1} a_{k_2}, \rho(t) a_{k_1}^+ a_{k_2}^+]) \}, \end{aligned} \quad (1)$$

式中

$$K = 2\pi g(\Omega) |s^{(2)}|^2 (1/4) \hbar \omega_{k_1} \omega_{k_2} \int_V N(\mathbf{r}) |u_{k_2}(\mathbf{r})|^2 |u_{k_1}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}. \quad (2)$$

式(1)和(2)中符号的物理意义和[1, 2]中相同。在福克表象中, 令  $\rho_n = \langle n | \rho | n \rangle$ ,  $\tau = 2Kt$ ,  $r = \rho_{A_1}(0) / \rho_{A_2}(0)$ 。  $\rho_{A_i}(0)$  为第  $i$  个原子能级的归一化始态密度, 则光子密度矩阵元运动方程为

$$\begin{aligned} (1+r) d\rho_n/d\tau = (n+2)(n+1)\rho_{n+2} - n(n-1)\rho_n \\ + r[n(n-1)\rho_{n-2} - (n+2)(n+1)\rho_n], \quad (n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3)$$

这个方程组反映了双光子过程光子密度矩阵元耦合特征: 奇矩阵元只和奇矩阵元(或偶矩阵元只和偶矩阵元)相耦合; 并且有阶梯组织结构。

### 三、推广的生成函数及其偏微分方程解

为讨论一般  $r$  值情况, 采用下列含  $r$  的生成函

$$G_i(r, x, \tau) = (1-rx^2) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2-i} \rho_{2n+2-i}(\tau), \quad (i=1, 2). \quad (4)$$

由(3)、(4)式得

$$(1+r)\partial G_i/\partial\tau = (1-x^2)(1-rx^2)\partial^2 G_i/\partial x^2, \quad (i=1, 2). \quad (5)$$

这个方程适用于  $0 \leq r \leq \infty$  的任何情况。根据  $G_i$  的定义可得

$$\rho_{2n+2-i}(\tau) = [1/(2n+2-i)!] (\partial^{2n+2-i} [G_i/(1-rx^2)]_{x=0} / \partial x^{2n+2-i}) \quad (i=1, 2). \quad (6)$$

由阶乘矩  $\langle n^{[k]} \rangle$ 、相关函数  $g^{(k)}$  定义<sup>[3]</sup>, 得

$$\langle n^{[k]} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \rho_n(\tau) / (n-k)! = \partial^k [(G_1+G_2)/(1-rx^2)]_{x=1} / \partial x^k, \quad (7)$$

$$g^{(k)} = \langle n^{[k]} \rangle / \langle n \rangle^k. \quad (8)$$

下面对不同  $r$  值情况分别用分离变量法求解。令(略去  $G_i$  中参数  $r$ )

$$G_i(x, \tau) = \sum_{k_i=0}^{\infty} a_{k_i} f_{k_i}(x) \exp(-\lambda_{k_i} \tau), \quad (i=1, 2). \quad (9)$$

由方程式(5)严格解出  $G_i$  的关键是能否严格确定(9)式中的  $a_{k_i}$ 。

#### 1. $0 \leq r < 1$ 时解析解

双光子过程中最常遇到的情况是  $0 \leq r < 1$ 。将(9)式代入(5)式, 再令  $h=1/r > 1$  和  $\lambda_{k_i} = 2k(2k+3-2i)(1-[r/\eta])/(1+r)$  ( $i=1, 2$ ), 为使数值计算收敛快, 参数  $r$  应适当调整, 本文取  $\eta=1/3$ 。作变换  $y=x^2$ , 得到有四个正则极点的 Heun 型方程<sup>[6,7]</sup>

$$y(y-1)(y-h)d^2 f_{k_i}(y)/dy^2 + (1/2)(y-1)(y-h)df_{k_i}(y)/dy + (1+h)\lambda_{k_i} f_{k_i}(y)/4 = 0. \quad (10)$$

这里对应于  $\alpha=0$ ,  $\beta=1/2$ ,  $\gamma=1/2$ ,  $\delta=0$ ,  $q_{k_i} = -(1+h)\lambda_{k_i}/4$ , 其解为 Heun 函数。

$$\begin{aligned} f_{k_i}(y) &= y^{1-r_i} F(h, q_{k_i}; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, y); \\ f_{k_i}(y) &= F(h, q_{k_i}; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, y); \\ (\alpha_i &= 0, \beta_i = -i+3/2, \gamma_i = 5/2-i, \delta_i = 0). \end{aligned} \quad (11)$$

当  $h=\infty$  ( $r=0$ ), Heun 函数退化为多项式。利用 Heun 方程的自伴形式, 在  $\text{Re}(r_i) > 0$ ,  $\text{Re}(\delta_i) > 0$  的条件下, 证明 Heun 函数具有正交性质。由于(11)式中  $\text{Re}(\delta_i) = 0$ , 不能直接利用 Heun 函数的正交性质, 故利用其导数 [也是 Heun 函数,  $F(h, q_{k_i}; 2, \beta_i+1, \gamma_i+1, \delta_i+1, y)$ ]。正交性质及初始条件严格确定(9)式中的  $a_{k_i}$ 。

$$\begin{aligned} a_{k_i} &= \sum_{n=0}^{k_i} \sum_{j=0}^{\infty} [c_{n+1}(k_i) \rho_{2j+2-i}(0) (n+1) j / (2n+2j+5-2i)] / \sum_{m=0}^{k_i} \sum_{j=0}^{k_i} \\ &\quad \times [c_{m+1}(k_i) c_{j+1}(k_i) (m+1) (j+1) / (2m+2j+7-2i)], \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $c_n(k_i)$  为 Heun 函数级数展开系数<sup>[7]</sup>, 由于  $r=0$  时, Heun 函数在  $x=1$  点收敛, 由(7)和(9)式得

$$\langle n \rangle(\tau) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k_i} a_{k_i} (2l+2-i) c_l(k_i) \exp(-\lambda_{k_i} \tau), \quad (13)$$

$$\langle n^{[2]} \rangle(\tau) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k_i} a_{k_i} (2l+2-i)(2l+1-i) c_l(k_i) \exp(-\lambda_{k_i} \tau), \quad (14)$$

对  $r \neq 0$ , 由于在  $x=1$  点 Heun 函数不收敛, 只能用待定系数法确定。由 (9) 和 (6) 式得

$$\rho_{2n+2-i}(\tau) = \sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{k_i} c_m(k_i) r^{n-m} \exp(-\lambda_{k_i} \tau), \quad (i=1, 2; n=0, 1, 2, \dots). \quad (15)$$

其中令  $\tau=0$ , 由于对充分大的  $L$ , 当  $l>L$  时有  $\rho_i(0) \ll 1$ , 并有  $\sum_{k_i=0}^{\infty} a_{k_i} \sum_{m=0}^n c_m(k_i) r^{n-m} \ll \rho_{2n+2-i}(0)$ , 可作截断近似, 截断为  $K$  维方程组, 再由克拉姆法则解出  $a_{k_i}$ 。利用 (15) 式、(7) 和 (8) 式可求  $\rho_{2n+2-i}(\tau)$ ,  $\langle n^{[k]} \rangle(\tau)$  和  $g^{(k)}(\tau)$ 。由于  $r=0$  时的  $a_{k_i}$  是严格确定的, 因而  $r=0$  时所有光子统计量都是严格确定的。

### 2. $r=\infty$ 时的严格解

P. Lambropoulos 曾用拉普拉斯变换法对此求解<sup>[5]</sup>, 它对应于粒子数全布居在上能级情况的双光子放大器。用生成函数法严格求解。令  $Q_i(x, \tau) = -\lim_{r \rightarrow \infty} G_i(r, x, \tau)/r$ , 以  $Q_i$  代替 (9) 式中  $G_i$ , (5) 式两边除以  $r^2$ , 求  $\lim_{r \rightarrow \infty} (\quad)$ , 作  $y=x^2$  和  $f_{k_i}(x) = y^{\alpha_i} u_{k_i}(y)$  的变换, 得超几何微分方程

$$y(y-1)d^2u_{k_i}(y)/dy^2 + (2\alpha_i+1/2)(y-1)du_{k_i}(y)/dy + \alpha_i(\alpha_i-1/2)u_{k_i}(y) = 0. \quad (16)$$

式中已取  $\lambda_{k_i} = 2\alpha_i(2\alpha_i-1)$ 。若令  $\alpha_i = k_i+1-i/2$ , 方程 (16) 的解是超几何函数。利用超几何函数展开式<sup>[6]</sup>, 由 (6) 和 (9) 式得

$$\rho_{2m+2-i}(\tau) = \sum_{k_i=1}^{m+1} a_{k_i} (k_i)_{m+1-k_i} (k_i+3/2-i)_{m+1-k_i} \exp(-\lambda_{k_i} \tau) / (m+1-k_i)! (2k_i+5/2-i)_{m+1-k_i} \quad (i=1, 2; m=0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

由初始条件, 用待定系数法得到  $a_{k_i}$  的严格递推关系式

$$a_{m_i+1} = \rho_{2m_i+2-i}(0) - \sum_{k_i=1}^{m_i} [(k_i)_{m_i+1-k_i} (k_i+3/2-i)_{m_i+1-k_i}] / [(m_i+1-k_i)! (2k_i+5/2-i)_{m_i+1-k_i}] \quad (i=1, 2; m_i=0, 1, 2, \dots), \quad (18)$$

式中  $(\alpha)_j = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+j-1)$  和  $(\alpha)_0$ , 显然  $a_{0_1} = \rho_1(0)$ ,  $a_{0_2} = \rho_0(0)$ 。

### 3. $1 < r < \infty$ 时的解析解

类似于  $0 < r < 1$  的情况, 令  $z=ry$ , 得 Heun 方程

$$z(z-1)(z-r)d^2f_{k_i}(z)/dz^2 + 1/2(z-1)(z-r)df_{k_i}(z)/dz + (1+r)h_{k_i}f_{k_i}(z)/4 = 0. \quad (19)$$

解  $f_{k_i}(z)$  的形式和 (11) 式相同。经推导得

$$\rho_{2n+2-i}(\tau) = \sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{k_i} c_m(k_i) r^{n+1-i/2} \exp(-\lambda_{k_i} \tau), \quad (i=1, 2; n=0, 1, 2, \dots). \quad (20)$$

(20) 和 (15) 式不同之处在于  $r$  的幂不同。其它各量求法和  $0 < r < 1$  情况相同。

### 4. $0 \leq r < 1$ 时的稳态解

当  $r < 1$ , 充分大的  $\tau$  后, 光场将趋向稳定, 有  $\partial G/\partial \tau = 0$  (已令  $G = G_1 + G_2$ ), 则 (5) 式变

为  $\partial^2 G / \partial \omega^2 = 0$ , ( $\tau \rightarrow \infty$ )。容易解出

$$\begin{aligned} G(r, x, \infty) &= a_1(r) + a_2(r), \quad a_1(r) + a_2(r) = 1 - r, \\ \rho_{2n+2-1}(r, \infty) &= a_1(r) r^n, \quad \langle n \rangle = [2r + a_1(r)] / (1 - r), \\ \langle n^{[2]} \rangle &= 2r [1 + 3r + 2a_1(r)] / (1 - r)^2, \\ g^{(2)} &= 2r [1 + 3r + 2a_1(r)] / [2r + a_1(r)]^2. \end{aligned} \quad (21)$$

和  $\tau \rightarrow \infty$  时 (15) 式比较, 有  $a_1(r) = a_{0_1} = \rho_1(r, \infty)$ ,  $a_2(r) = a_{0_2} = \rho_0(r, \infty)$ 。且当  $r \rightarrow 1$ ,  $a_1(r) + a_2(r) \rightarrow 0$ 。当  $r=0$ ,  $\rho_n(\infty) = 0$ , ( $n > 1$ )。平均光子数  $\langle n \rangle = a_1(0) \neq 0$ ,  $\langle n^{[2]} \rangle = g^{(2)} = 0$ 。这是由于同时到达原子的光子被原子吸收, 剩下的不能被吸收的光子只能一个个地顺序到达原子附近, 不出现几个光子同时到达原子的起伏现象。

#### 四、阶乘矩和相关函数运动方程及 $r=1$ 时的严格解

生成函数法也可解  $r=1$  的情况, 所得光子统计量表示式非常复杂, 这里从略。有时物理问题不要求知道  $\rho_n(\tau)$ , 只要求知道  $\langle n \rangle(\tau)$ ,  $\langle n^{[2]} \rangle(\tau)$ ,  $g^{(2)}(\tau)$  等及这些物理量之间的依赖关系。为此求得光子阶乘矩运动方程和相关函数运动方程

$$\begin{aligned} (1+r) d\langle n^{[k]} \rangle / d\tau &= -2(1-r) k \langle n^{[k+1]} \rangle + k[(5k+3)r - (k-1)] \langle n^{[k]} \rangle \\ &+ 4rk^3 \langle n^{[k-1]} \rangle + rk^2(k-1)^2 \langle n^{[k-2]} \rangle, \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (1+r) dg^{(k)} / d\tau &= -2(1-r) k \langle n \rangle g^{(k+1)} + k[2(1-r) \langle n \rangle g^{(2)} + (5r-1)(k-1) \\ &- 4r / \langle n \rangle] g^{(k)} + 4rk^3 g^{(k-1)} / \langle n \rangle + rk^2(k-1)^2 g^{(k-2)} / \langle n \rangle^2, \quad (k=2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (23)$$

约定  $\langle n^{[0]} \rangle = 1$ ,  $\langle n^{[-1]} \rangle = 0$ ,  $g^{(1)} = 1$ ,  $g^{(0)} = 1$ 。对于一般  $r$  情况, 由  $\langle n^{[k]} \rangle$  或  $g^{(k)}$  分别和高一阶的  $\langle n^{[k+1]} \rangle$  或  $g^{(k+1)}$  耦合, 这两组方程求解困难。但  $r=1$  时, 解除了  $\langle n^{[k]} \rangle$  和  $\langle n^{[k+1]} \rangle$  的耦合, 可得  $\langle n^{[k]} \rangle(\tau)$  的简洁的严格解。  $g^{(k)}(\tau)$  亦然。解  $\langle n \rangle$  和  $\langle n^{[2]} \rangle$  为

$$\langle n \rangle = n_0 A(\tau) + [A(\tau) - 1] / 2, \quad (24)$$

$$\langle n^{[2]} \rangle = (g_{(0)}^{(2)} n_0^2 + 2n_0) A^3(\tau) - 2n_0 A(\tau) + [A^3(\tau) - 2A(\tau) + 1] / 2, \quad (25)$$

式中  $n_0$  和  $g_{(0)}^{(2)}$  为初值,  $A(\tau) = \exp(4\tau)$ 。(24)和(25)式中最后一项为自发双光子发射的贡献。第二阶相关函数为

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\tau) &= [(g_{(0)}^{(2)} n_0^2 + 2n_0 + 1/2) A^3(\tau) - (2n_0 + 1) A(\tau) \\ &+ 1/2] / [(n_0 + 1/2) A(\tau) - 1/2]^2. \end{aligned} \quad (26)$$

易证明, 对真空场  $n_0=0$ ,  $\tau_m = \ln 2/4$  时, 有极小值  $g_{\min}^{(2)}(\tau_m) = 10$ 。由(22)式可见, 自发双光子发射对高阶阶乘矩 ( $k > 2$ ) 没有贡献。

#### 五、结果讨论

分别对三种初始光场的光子统计物理量进行了数值计算。脉冲相干态和相干态光场光子密度分布为<sup>[8]</sup>

$$\rho_0(0) = 1 - f + f \exp(-n_0/f), \quad (27)$$

$$\rho_n(0) = f \exp(-n_0/f) \cdot (n_0/f)^n / n! \quad (n \geq 1). \quad (28)$$

$n_0/f$  是脉冲相干态光场平均光子数,  $f$  是脉冲场时间占有比。  $f=1$  为相干态场。混沌态光

场光子密度分布为

$$\rho_n(0) = n_0^n / (1 + n_0)^{n+1}. \quad (29)$$

计算结果如图示。 $r$  对光子统计的影响由图 1、2 清楚可见。热平衡时,  $r$  的影响必反映为温度对光子统计的影响。用  $\text{CO}_2$  激光做分子双光子过程实验时, 这种影响不可忽略。而用较短波长激光实现双光子过程(如原子), 由于  $\Delta E$  较大, 温度的影响可以忽略。

### 1. $r$ 对光子反聚束效应的影响

我们以  $g^{(2)} < 1$  作为光子反聚束的判据<sup>[3]</sup>。 $r$  对产生反聚束的影响如图 2 所示。当  $r < \tau_0$  (原子或分子的某一态分布比) 时, 光场才有可能在介质中传播一定的约化时间  $\tau_0$  之后呈现反聚束效应。

(1) 初始场光子统计性不同, 对应的  $\tau_0$  也不同。脉冲相干态光场很难演化为反聚束效应光场。

(2) 对统计性质不同的初始场和不同的  $r$ , 其呈现反聚束效应的传播时间  $\tau_0$  亦不同。对同一初始场,  $r$  越小  $\tau_0$  亦越小。

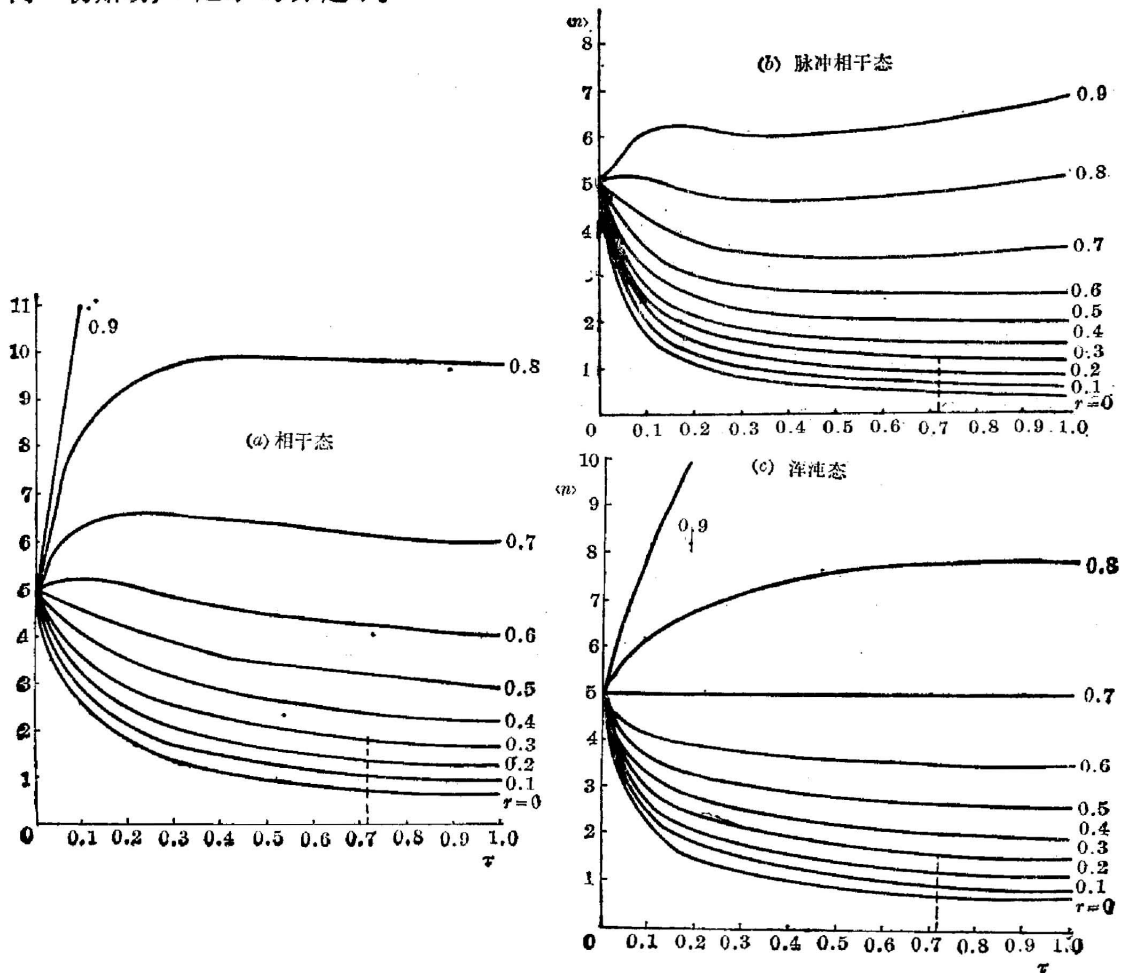


图 1  $\langle n \rangle$ - $\tau$  曲线,  $0 \leq r < 1$ ,  $n_0 = 5$

Fig. 1 Curves of  $\langle n \rangle$  vs.  $\tau$ .  $0 \leq r < 1$ ,  $n_0 = 5$ . The initial light fields are (a) coherent states, (b) pulse coherent states ( $f=1/2$ ), and (c) chaotic states

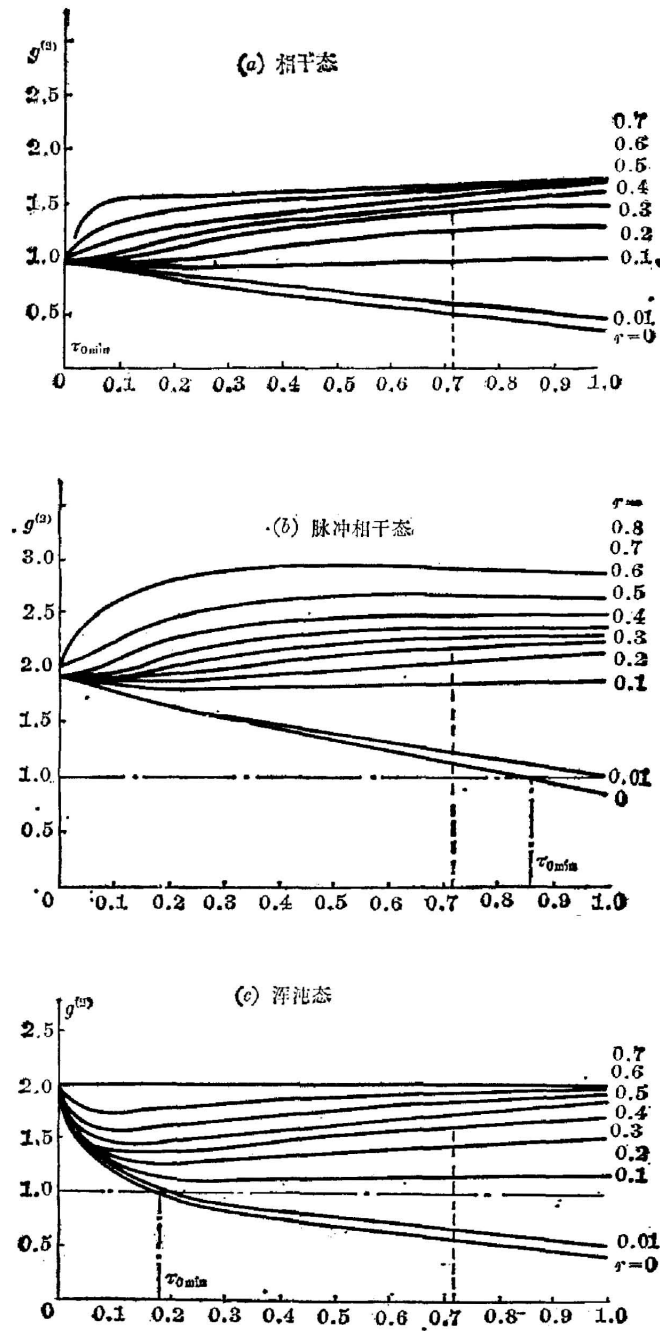


图 2  $g^{(2)}-\tau$  曲线,  $0 \leq r < 1$ ,  $n_0=5$

Fig. 2 Curves of  $g^{(2)}$  vs.  $\tau$ .  $0 \leq r < 1$ ,  $n_0=5$ . (a) coherent state fields with the critical population ratio of antibunching  $r_0 \approx 0.1$ ; and the minimum propagation time for the antibunching effect to appear  $\tau_{0min}=0$ . (b) Pulse coherent state fields ( $f=1/2$ ),  $r_0 \approx 0.01$ ,  $\tau_{0min} \approx 0.876$ . (c) Chaotic state fields,  $r_0 < 0.1$  ( $\approx 0.08$ ),  $\tau_{0min} \approx 0.18$

(3) 对相干态光场和混沌态光场, 当  $r$  稍小于  $r_0$  时, 光场呈现微弱的反聚束效应后又随  $\tau$  发展趋向聚束。这是由于当光场减弱到一定程度后, 双光子发射增加聚束的作用超过了双光子吸收使光子反聚束的作用。

为了简单明了看出  $r_0$  和哪些物理量定性有关, 由(23)式作近似解  $g^{(2)}(\tau)$ , 得

$$r_0 = 1 - \left( \frac{\{4(1-1/n_0)g_{(0)}^{(2)} + 16/n_0 + 2/n_0^2\}\tau + 2(g_{(0)}^{(2)} - 1)}{\{4n_0g_{(0)}^{(3)} - g_{(0)}^{(2)}(2n_0g_{(0)}^{(2)} - 5 + 4/n_0) + 16/n_0 + 2/n_0^2\}\tau + g_{(0)}^{(2)} - 1} \right), \quad (30)$$

$$\tau_{0 \min} = (g_{(0)}^{(2)} - 1) / 2[2n_0g_{(0)}^{(3)} - g_{(0)}^{(2)}(2n_0g_{(0)}^{(2)} - 1)]. \quad (31)$$

$\tau_{0 \min} = \tau_{0 \min} / 2K$ , 为  $r=0$  时之  $t_0$  和  $\tau_0$ 。由上两式可见: (1)  $n_0$  越大则  $r_0$  越大,  $g_{(0)}^{(3)}$  越大,  $r_0$  也越大; (2) 相干场时  $r_0$  和  $\tau$  无关, 其它两种光场  $r_0$  随  $\tau$  增大。(3) 混沌态场  $\tau_{0 \min}^{(ch)}$  随  $n_0$  增大而减小, 相干态场  $\tau_{0 \min}^{(coh)}$ 、脉冲相干态场  $\tau_{0 \min}^{(p)}$  和  $n_0$  无关, 且  $\tau_{0 \min}^{(p)} > \tau_{0 \min}^{(ch)} > \tau_{0 \min}^{(coh)}$ 。事实上, 光场在双光子吸收介质中传播很短时间后, 光场统计性质便改变了, 尤其是混沌态场变化最大, 所以由(30), (31)式引出的结果只是定性的。另外, 从稳态解(21)式, 可得  $r_0(\infty) = 0.094$ , 这个值和图 2(a)、(c) 的值  $r_0$  相当接近。称  $\max r_0$  为产生反聚束效应的临界态分布比, 介质的  $r > \max r_0$  时光场不可能通过双光子过程产生反聚束现象。

由上述讨论可得结论: 选取双光子跃迁矩阵元  $\varepsilon^{(2)}$  大、原子密度  $N(r)$  高的介质为双光子吸收介质, 使用较短波长、较强的连续激光束透过介质的光程较长(如采用折叠腔措施等), 可较容易地得到较强的反聚束效应。

## 2. 双光子放大器光子统计特性

双光子放大的一个重要特点是, 甚至在  $r < 1$ , 粒子布居尚未反转时, 就可有效地实现双光子放大(图 1), 而且这时光场的高阶相干性不好,  $g^{(2)}(\tau) > 1$ (图 2)。这是由于自发双光子发射有相当的贡献所致。

由稳态解(21)式, 当  $r \rightarrow 1$  时,  $g^{(2)}(\infty) \rightarrow 2$ ; 但由  $r=1$  的严格解(26)式, 当  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $g^{(2)}(\tau) \rightarrow \infty$ 。两者趋势不一致, 这是由于稳态解生成函数只适用于  $r < 1$ , 而严格解(26)式只适用于  $\tau$  不太长、 $\langle n \rangle$  尚未增大到足以使介质粒子布居有显著改变的情况。物理上原因是  $r=1$  时

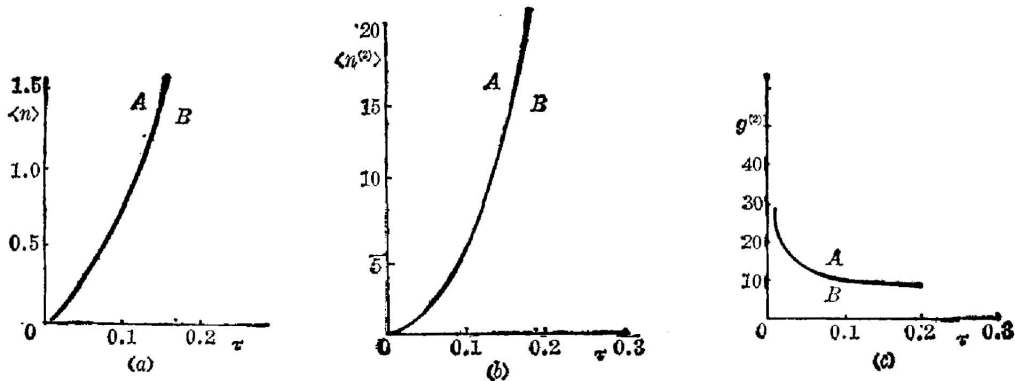


图 3 原子完全处于激发态, 即  $r = \infty$  时, 初始场为真空场, 双光子放大器光子统计  
Fig. 3 Photon statistics for a two-photon amplifier, which has all its atoms in the excited state (i.e.  $r = \infty$ ) and vacuum state field as its initial field. (a) Curves of  $\langle n \rangle$  vs.  $\tau$ , (b) Curves of  $\langle n^{(2)} \rangle$  vs.  $\tau$ , (c) Curves of  $g^{(2)}$  vs.  $\tau$ . A—present results, B—results in [2, 5].

介质粒子布居发生反转,发生状态的突变,使光子统计性质发生显著的变化,这种变化集中反映为  $g^{(2)}(\tau)$  的增大。

由图 3、4 可见,  $r=1$  时,当  $\tau > \ln 2/4$ ,  $g^{(2)}(\tau)$  随  $\tau$  近似以指数增大;  $r=\infty$  时,以真空态为初始场的双光子放大,光场的  $g^{(2)}(\tau) > 8$ 。这表明双光子放大器光场的高阶相干性很差。 $g^{(2)} > 2$  的现象称为光子超聚束现象。这是由于双光子放大过程决定了光子发射至少是成对的、正相关特性很强所致。

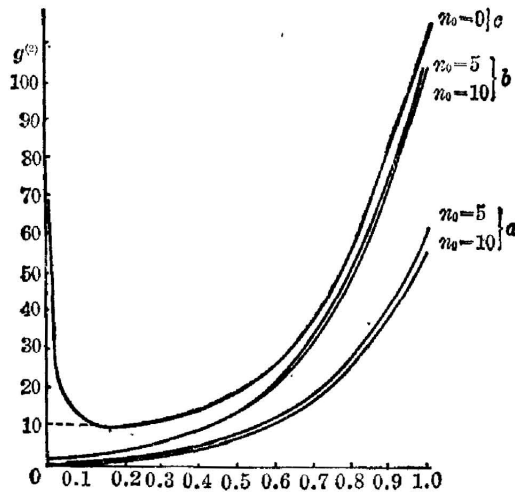


图 4 半数原子处于激发态,即  $r=1$  时双光子放大器光子统计  $g^{(2)}-\tau$  曲线

Fig. 4 Photon statistics for a two-photon amplifier, which has half of its atoms in the excited state (i.e.  $r=1$ ). (a) Curves of  $\langle n \rangle$  vs.  $\tau$ , (b) Curves of  $\langle n^{(2)} \rangle$  vs.  $\tau$ , (c) Curves of  $g^{(2)}$  vs.  $\tau$ . The initial field is: a—coherent state field, b—chaotic (or pulse coherent) state field, c—vacuum state field,  $g_{\min}^{(2)}=10$

Jackson 和 Wynne<sup>[8]</sup> 认为 Nikolaus 等<sup>[9]</sup> 的“双光子激光”工作是参量过程。由于非简并参量过程中泵浦模、信号模和闲模都以单光子过程形式出现,这些场不可能呈现光子超聚束现象。因此光子超聚束效应可作为一种手段,用于判断双光子激光器中工作介质是否真正实现双光子放大作用。

作者对谭维翰副研究员的热情帮助、宝贵的建议和有益的讨论致谢。

#### 参 考 文 献

- [1] Y. R. Shen; *Phys. Rev.*, 1967, **155**, No. 3 (Mar), 921.
- [2] S. Carusotto *et al.*; *Phys. Rev.*, 1968, **185**, No. 5 (Jan), 1391.
- [3] P. Lambropoulos *et al.*; *Phys. Rev.*, 1966, **144**, No. 4 (Apr), 1081.
- [4] G. R. Agarwal; *Phys. Rev. A*, 1970, **1**, No. 5 (May), 1445.
- [5] F. Sanchez; *Nuovo Cimento(B)*, 1975, **27**, No. 2 (Givgno), 305.
- [6] Y. Gontier, M. Trahin; *J. Phys. (B)*, 1976, **12**, No. 13 (Jul), 2123.
- [7] K. T. Menesl, D. F. Walls; *J. Phys. (A)*, 1974, **7**, No. 5 (Mar), 617.
- [8] H. D. Simann, R. Loudon; *J. Phys. (A)*, 1975, **8**, No. 4 (Apr), 539. *ibid.*, 1975, **8**, No. 7 (Jul), 1140.
- [9] H. Paul *et al.*; *Opt. Commun.*, 1976, **17**, No. 2 (May), 145.



- [10] P. Lambropoulos; *Phys. Rev.*, 1967, **156**, No. 2 (Apr), 286.  
[11] M. S. Zubairy, T. T. Yeh; *Phys. Rev. (A)*, 1980, **21**, No. 5 (May), 1624.  
[12] 王竹溪, 郭敦仁; 《特殊函数导论》, (科学出版社, 1977), 245.  
[13] E. Kamke; 《常微分方程手册》, (科学出版社, 1977), 580.  
[14] D. J. Jackson, J. J. Wynne; *Appl. Phys. (B)*, 1982, **28**, No. 4 (Aug), 233.  
[15] B. Nikolaus *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**, No. 2 (Jul), 171.

## Photon statistics for two-photon processes

HE LINSHENG

(*Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 3 October 1984; revised 2 February 1985)

### Abstract

The photon statistic of two-photon processes is treated for the general case of two-level systems. After generalizing the generating-function method, we derived the generating function with parameter  $r$  (atomic population ratio), its partial differential equation, and equations of factorial moments as well as equations of correlation functions. Analytical solutions were obtained for various values of  $r$ . Curves of  $\langle n \rangle$  and  $g^{(2)}$  versus  $\tau$  and  $r$  were deduced for three kinds of initial fields. Both the effect of  $r$  on photon antibunching and characteristics photon statistics for two-photon amplifiers are discussed. The photon superbunching is proposed as one of the criteria for two-photon amplification.