

激光散斑反差与表面粗糙度 关系的理论分析

毛文懿 包学诚 陈雅贞
(上海交通大学精密仪器系)

庄松林
(上海光学仪器研究所)

提 要

本文从 Fresnel-Kirchhoff 衍射公式出发, 直接由光强分布导出了散斑平均反差与表面粗糙度特征参数的关系公式, 采用指数形式和高斯形式的自相关函数, 得到极为相符的计算结果。利用激光衍射散斑平均反差测量表面粗糙度, 具有精度高和分辨高等优点, 可以用于测试精密表面的粗糙度。

一、前 言

从激光出现以来, 由相干的激光所产生的散斑现象受到很大的重视, 许多学者^[1]致力于研究散斑图样的统计性质。Sprague^[2]首先提出了利用散斑反差测量表面粗糙度的方法。后来 Asakura 和 Goodman 等^[3, 4]就散斑的统计性质与表面粗糙度的关系进行了研究。他们从概率密度函数或传递函数的概念出发, 在一定的近似假设下, 研究合成复振幅的统计特性, 从而导出成像散斑平均反差与面粗糙度的关系公式。这样的分析计算是不够直观和精确的。

本文从 Fresnel-Kirchhoff 衍射公式出发, 对于远场衍射, 直接由光强分布导出散斑平均反差与表面粗糙度特征参数的关系公式, 所用统计模型简单合理, 从而大大简化了推算步骤, 得到了较为简明的公式, 计算结果与实验基本相符。

二、公式推导

物体表面衍射散斑图样的形成过程(如图1所示)。在 z 足够大时, 根据 Fraunhofer 衍射, 远场的振幅分布可以表示为*^[5]

$$U(x') = O \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\phi(x)] \exp[-2\pi i f_x x] dx = O \int_{-D/2}^{D/2} \exp[i\phi(x)] \exp[-2\pi i f_x x] dx, \quad (1)$$

式中, O 为复常数(包括光波复振幅、倾斜因子、波面形状参数、反射系数等); D 为被测表面上激光照明光斑尺寸; f_x 为空间频率, $f_x = x'/\lambda z$, 其中 λ 为激光波长; $\phi(x)$ 为被测物体表面

收稿日期: 1985年1月8日; 收到修改稿日期: 1985年3月11日

* 为简化讨论, 取一维座标。

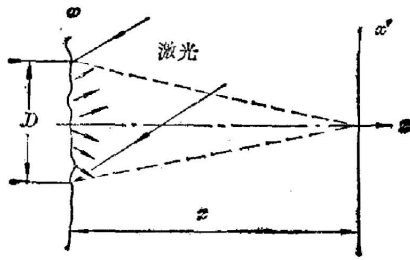


图 1 散斑的形成

Fig. 1 Formation of speckle

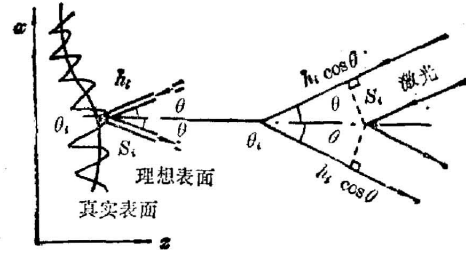


图 2 表面不平度与位相差的关系

Fig. 2 Relationship between surface roughness and phase variation

不平度 $h(x)$ 引起的位相差, 它近似地可以表示为 $\phi(x) = (2\pi/\lambda)h(x) \cdot 2 \cos \theta$, 这里 θ 为入射光线与表面法线的夹角, 如图 2 所示。

因而, 散斑的强度分布可以得到如下列形式:

$$I(x') = |U(x')|^2 = \left| O \int_{-D/2}^{D/2} \exp[i\phi(x)] \exp[-2\pi i f_x x] dx \right|^2, \quad (2)$$

这里还必需指出, $\phi(x)$ 假设是稳定的、零平均的、随机的高斯变量。

为了定量地评定散斑强度变化, 引入平均反差 V , 以观察平面 (衍射平面) 上散斑强度变化的规范化标准偏差, 它可定义为

$$V = \langle \Delta I^2 \rangle^{1/2} / \langle I \rangle = [\langle I^2(x') \rangle - \langle I(x') \rangle^2]^{1/2} / \langle I(x') \rangle, \quad (3)$$

$$\langle I(x') \rangle = \iint \langle \exp[\phi(x_1) - \phi(x_2)] \rangle \exp[-2\pi i f_x (x_1 - x_2)] dx_1 dx_2, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \langle I^2(x') \rangle = & \iiint \langle \exp\{i[\phi(x_1) - \phi(x_2) + \phi(x_3) - \phi(x_4)]\} \rangle \\ & \times \exp[-2\pi i f_x (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)] dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \end{aligned} \quad (5)$$

式中, 括号 $\langle \dots \rangle$ 表示集平均。由于平均反差 V 是一相对的量, 所以公式(1)中的复常数 O 最终相消, 为讨论简单起见, 以后推算中均省略之。在(4)式和(5)式中仅对随机变量 $\phi(x)$ 取均值。假设 $\langle \phi^2(x) \rangle = \sigma^2 \ll 1$, 将取均值的指数项幂级数展开, 只考虑前二项, 则可以得到

$$\langle \exp\{i[\phi(x_1) - \phi(x_2)]\} \rangle = \left\langle 1 - \frac{[\phi(x_1) - \phi(x_2)]^2}{2!} \right\rangle = 1 - \sigma^2 + \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \langle \exp\{i[\phi(x_1) - \phi(x_2) + \phi(x_3) - \phi(x_4)]\} \rangle &= \left\langle 1 - \frac{[\phi(x_1) - \phi(x_2) + \phi(x_3) - \phi(x_4)]^2}{2!} \right\rangle \\ &= 1 - 2\sigma^2 + 4\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle - 2\langle \phi(x_1)\phi(x_3) \rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

根据 $\langle \phi(x) \rangle$ 的定义, 可以知道 $\langle \phi(x_1) \rangle = \langle \phi(x_2) \rangle = \langle \phi(x_3) \rangle = \langle \phi(x_4) \rangle = 0$, 该物体表面的自相关函数 $\langle \phi(x_i)\phi(x_j) \rangle$ ($i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j$) 均相等。将其代入(3)式, 即可以求得散斑的平均反差 V 。

三、自相关函数型式的选择

对于各向同性的精密表面 [$\phi(x) \ll 2\pi$], 它的高度分布符合高斯规律, 自相关函数亦为高斯型式。因此

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle = \sigma^2 \exp[-(x_1 - x_2)^2/d^2], \quad (8)$$

式中, d 为表面的平均颗粒度, 对于一维情况, 则相当于表面的平均波长。对于精密表面, 平均波长 λ_q 在 $10 \sim 30 \mu\text{m}$ 范围内。

假设 $R(x_i - x_j) = \langle \phi(x_i) \phi(x_j) \rangle$, 由自相关函数的物理意义可知, 在 $(x_i - x_j) = 0$ 处, x_i 与 x_j 完全相关, 因而 $R(x_i - x_j) = 1$ 。在 $(x_i - x_j) = \infty$ 处, x_i 与 x_j 完全不相关, $R(x_i - x_j) = 0$ 。随着 $(x_i - x_j)$ 从 0 变化到 ∞ , $R(x_i - x_j)$ 的下降速度先快后慢, 且 $R(x_i - x_j)$ 是 $(x_i - x_j)$ 的偶函数。在这种情况下, 自相关函数取指数型式可以简化计算, 即

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \sigma^2 \exp[-|x_1 - x_2|/d]。 \quad (9)$$

将公式(8)和(9)代入公式(6)和(7), 可以得到自相关函数为指数型式和高斯型式的散斑反差计算公式。

1. 自相关函数为指数型式

$$\begin{aligned} \langle I(x') \rangle &= \iint_{\Sigma} \langle \exp\{i[\phi(x_1) - \phi(x_2)]\} \rangle \exp[-2\pi i f_x(x_1 - x_2)] dx_1 dx_2 \\ &= (1 - \sigma^2) I_1 + \sigma^2 I_2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \langle I^2(x') \rangle &= \iiint \langle \exp\{-i[\phi(x_1) - \phi(x_2) + \phi(x_3) - \phi(x_4)]\} \rangle \\ &\quad \exp[-i2\pi f_x(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)] dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\ &= (1 - 2\sigma^2) I_1^2 + 4\sigma^2 I_1 I_2 - 2\sigma^4 I_1 I_3, \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\int_{-D/2}^{D/2} \cos 2\pi f_x x dx \right]^2 = \left(\frac{\sin \pi f_x D}{\pi f_x} \right)^2, \\ I_2 &= \iint_{\Sigma} \exp[-|x_1 - x_2|/d] \exp[-i2\pi f_x(x_1 - x_2)] dx_1 dx_2 \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{d^2} \left(\frac{D-d}{d} \right) + 4\pi^2 f_x^2 \left(\frac{D+d}{d} \right) + \exp\left(\frac{D}{d}\right) \left[\left(\frac{1}{d^2} - 4\pi^2 f_x^2 \right) \cos 2\pi f_x D \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4\pi f_x}{d} \sin 2\pi f_x D \right] \right\} / \left(\frac{1}{d^2} + 4\pi^2 f_x^2 \right), \\ I_3 &= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \exp[-|x_1 - x_3|/d] \exp[-i2\pi f_x(x_1 + x_3)] dx_1 dx_3 \\ &= \frac{d \sin 2\pi f_x D}{\pi f_x} - \frac{2 \cos 2\pi f_x D + 4\pi f_x d \sin 2\pi f_x D - 2 \exp(-D/d)}{(1/d^2) + 4\pi^2 f_x^2}。 \end{aligned}$$

于是, 散斑反差 $V(x')$ 为

$$V(x') = \frac{[2\sigma^2(I_3 - I_2)I_1 - \sigma^4(I_1 - I_3)]^{1/2}}{(1 - \sigma^2)I_1 + \sigma^2 I_2}。 \quad (12)$$

2. 自相关函数为高斯型式

$$\begin{aligned} \langle I(x') \rangle &= \iint_{\Sigma} (1 - \sigma^2 + \sigma^2 \exp[-(x_1 - x_2)^2/d^2]) \exp[-i2\pi f_x(x_1 - x_2)] dx_1 dx_2 \\ &= (1 - \sigma^2) I_1 + \sigma^2 I_4, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \langle I^2(x') \rangle &= (1 - 2\sigma^2) \left[\int_{-D/2}^{D/2} \cos 2\pi f_x x dx \right]^4 + 4\sigma^2 \left(\int_{-D/2}^{D/2} \cos 2\pi f_x x dx \right)^2 \\ &\quad \times \iint_{\Sigma} \exp[-(x_1 - x_2)^2/d^2] \exp[-i2\pi f_x(x_1 - x_2)] dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

$$-2\sigma^2 \left(\int_{-D/2}^{D/2} \cos 2\pi f_x x dx \right)^2 \iint_{\Sigma} \exp[-(x_2 - x_3)^2/d^2] \times \exp[-i2\pi f_x(x_1 + x_3)] dx_1 dx_3, \quad (14)$$

$$\text{式中 } I_4 = Dd\sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 f_x^2 d^2) - d^2 + \pi f_x d^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k!}{(2k+1)!} (2\pi f_x d)^{2k+1},$$

$$I_5 = \frac{\sin 2\pi f_x D}{2\pi f_x} d\sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 f_x^2 d^2) - \frac{\cos 2\pi f_x D}{2\pi f_x} d \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{(2k+1)!} (2\pi f_x d)^{2k+1}$$

于是, 散斑反差 $V(x')$ 为

$$V(x') = \frac{[2\sigma^2(I_5 - I_4)I_1 - \sigma^4(I_1 - I_5)^2]^{1/2}}{(1 - \sigma^2)I_1 + \sigma^2 I_4}, \quad (15)$$

由此, 平均反差 V 为

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(x_i), \quad (16)$$

式中, N 为取样点数。

四、计算结果和分析

因为 $\sigma = [\langle \phi^2(x) \rangle]^{1/2} = (2\pi/\lambda) [\langle h^2(x) \rangle]^{1/2} \cdot 2 \cos \theta = (4\pi/\lambda) \cos \theta \cdot R_q$,

则

$$R_q = (\lambda/4\pi \cos \theta) \sigma, \quad (17)$$

因此, 当 $\theta = 60^\circ$ 时, $R_q = 0.1\sigma$ 。考虑到(6)式和(7)式的展开近似, 假设 $\sigma < 1$, 故在应用(10)~(16)式计算时, R_q 应小于 0.1。

现取 $d = 30 \mu\text{m}$, $D = 2 \text{mm}$, $L = 500 \text{mm}$, $x' = (0, 4.5)$, 对于两种自相关函数形式, 利用 FORTRAN 77 语言分别编制平均反差计算程序, 在 B 1955 电子计算机上进行运算, 得到如下的结果:

R_q	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045	0.050
高斯形式	0.397	0.467	0.564	0.610	0.660	0.705	0.746	0.786	0.809	0.820
指数形式	0.389	0.446	0.504	0.546	0.585	0.617	0.666	0.720	0.755	0.774

由上述计算结果可以看出, 两者非常接近。这主要是由于 $f(x) = \exp(-x^2/d^2)$ 高斯曲线与 $f(x) = \exp[-|x|/d]$ 指数曲线形状相似。因此, 为了简化计算, 采用指数形式的自相关函数是适宜的^[6]。

图 3 所示为计算结果得到的两种自相关函数形式的 $V-R_q$ 曲线。由图 3 可以看出, 当 $R_q < 0.05$ (相当表面粗糙度 $\nabla 12$), 表面粗糙度 R_q 与散斑反差 V 的关系近似线性。

我们采用图 4 所示的测量系统, 以电荷耦合器件 (CCD) 作为光信号接收和光电转换器件。在图中氦氖激光器 L_s 发出的激光束 ($\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$) 被望远镜 L_o 扩束并均匀照明光阑 P_1 , 光阑孔径可以改变, 以控制照明区域的光斑尺寸。入射激光束经被测表面 P_2 反射, 在远场形成散斑图样 (距离 $L = 0.5 \text{m}$)。在 P_3 平面上放置 CCD 元件 (线型列阵, 共 150 元, 每元线度 $30 \mu\text{m}$, 整个光接收区为 4.5mm)。散斑场中的光强信号经光电转换、放大、A/D

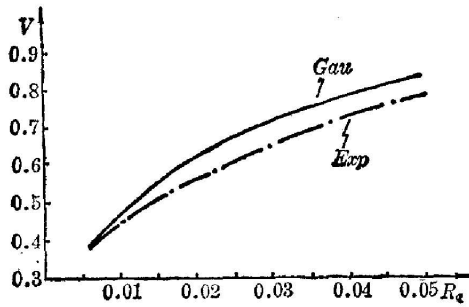
图3 $V-R_q$ 曲线

Fig. 3 Laser speckle contrast V as a function of rms surface roughness

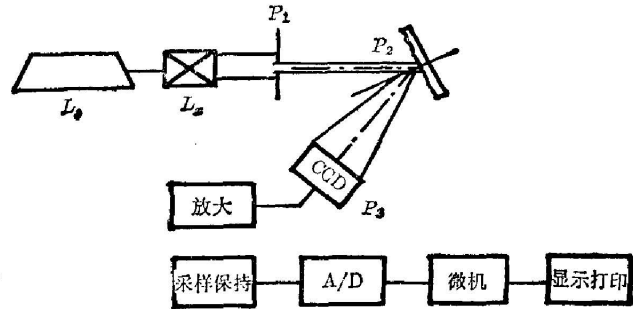


图4 实验装置原理图

Fig. 4 Schematic experimental layout

转换后,送入微机进行数据处理,求出随机信号的均方差,算出散斑反差。对不同表面粗糙度标准样板 $\nabla 14$ ($R_a=0.008 \sim R_q=0.010$)、 $\nabla 13$ ($R_a=0.012 \sim R_q=0.015$) 和 $\nabla 11$ ($R_a=0.058 \sim R_q=0.072$) 分别测得其相应的反差值为 0.45、0.6 和 0.9。由此可知,实验测试结果与理论计算基本相符。

造成误差的原因主要是:轮廓仪测量的 R_a 值 (R_q 值) 的误差一般在 15% 左右,而且取样长度小 (0.08~0.25),而散斑测量的光斑尺寸较大 ($\phi 2\text{mm}$),具有一定的平均效应;其次,被测工件的安装误差,包括轮廓测量所取的测量区域与本方法所取的不可能完全一致。后一点在系统仪器化后可以得到改进。

本文所述的方法适用于精密表面的粗糙度测量 ($R_q < 0.05$ 或 $R_a < 0.04$),特别适用于光学表面的粗糙度测量,它与表面形貌的纹理方向无关。如果采用长波长的相干光(激光)可以扩大测量范围(粗糙端),如果采用 X、Y 射线则亦可以提高超精表面的测量精度;此外,增大照明光束的入射角也可以扩大测量粗糙度的范围。

如果采用部分相干光照明,散斑的信息含量更加丰富,散斑反差与表面粗糙度的关系曲线的线性区域将扩大,从而也就扩大了表面粗糙度的测量范围。

本工作得到上海交通大学汤一铭、杨翠莲、范渭民和殷琢豫副教授的帮助,黄佩森和杨晓红同志以及孙炳荣、王辉明工程师帮助建立实验装置和进行测试,在此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] J. C. Dainty; *«Laser Speckle and Related Phenomena»*, (Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975).
- [2] R. A. Sprague; *Appl. Opt.*, 1972, 11, No. 12 (Dec), 2811.
- [3] J. Ohtsubo, T. Asakura; *Opt. Commun.*, 1975, 14, No. 1 (May), 30.
- [4] J. W. Goodman; *Opt. Commun.*, 1975, 14, No. 3 (Jul), 324.
- [5] M. Born, E. Wolf; *«Principles of Optics»*, (Pergamon Press, 1975).
- [6] S. I. Zhuang; *«Coherence Requirements, Transfer Function and Noise Performance of a Partially Coherent Optical Processor»*, (Ph. D. Thesis, Penn. State University, 1983).

Theoretical analysis of the relationship between contrast of laser speckle pattern and surface roughness

MAO WENYI BAO XUECHENG AND CHEN YATSENG

(Department of Precision Instrument, Shanghai Jiaotong University)

ZHAUNG SONGLIN

(Shanghai Optical Instrument Research Institute)

(Received 1 January 1985; revised 11 March 1985)

Abstract

In this paper, the relationship between characteristic of surface roughness and average contrast of laser speckle pattern has been derived directly from the Fresnel-Kirchhoff diffraction formula by means of light intensity distribution. Two forms of autocorrelation function have been considered, and the corresponding results are very similar. The method of measuring surface roughness using average contrast of laser speckle pattern can be used in measuring roughness of precise surfaces with high accuracy and high resolving power.