

反向脉冲传递法—— 扩展白光干涉现象研究

II. Lau 效应和光栅成像

刘立人

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文用反向脉冲传递法分析了扩展白光照明下的光栅成像现象,即一个光栅被另一光栅成像的过程,进而分析了 Lau 效应,其优点是:分析方法简单,物理意义明确,解释完整。

我们已经用反向脉冲传递法^[1,2]研究了扩展白光成像干涉仪^[3],用系统理论来解释扩展白光干涉现象,数学方法简单,物理意义明确。本文讨论 Lau 效应和光栅成像。

由扩展光源照明两个周期相等并且相隔一定距离的衍射光栅,在无穷远处观察到的干涉效应称为 Lau 效应。Lohmann^[4]基于衍射理论和 Talbot 效应给予了解释,并且据此提出了 Lau 干涉法^[5]。以后 Sudol 和 Thompson^[6,7]和 Gori^[8]提出了相干理论解释。最近 Swanson 和 Leith^[9]基于双光栅衍射干涉仪模型给出了光栅成像和 Lau 效应的解释,认为光栅成像是一个光栅被另一光栅成像的现象。Lohmann^[10]提出了用光学传递函数的解释方法。

本文基于系统理论采用我们提出的反向脉冲传递法进行分析。首先讨论光栅成像,然后解释 Lau 效应。这样就给出了对这两现象的一种新的简单而明确的解释。尤其是对于 Lau 效应的各种基本物理现象都能给予定量和定性的解答。

一、光栅成像

光栅成像可由图 1 来说明, S 为扩展光源并照明衍射光栅 G_1 和 G_2 , 两光栅间距为 Z_0 , G_2 距观察屏为 Z_1 , 在一定条件下将在观察屏上出现 G_1 的像。

现在用反向脉冲法求解观察屏上任一点 (ξ, η) 对于光源面的场分布。假定波长为 λ , 向光源方向取为纵轴方向*。显然,在光栅 G_2 的右方的光场为

$$e_2^-(x, y) = q\left(x, y; \frac{1}{\lambda Z_1}\right) \otimes \otimes \delta(x - \xi, y - \eta) = q\left(x - \xi, y - \eta; \frac{1}{\lambda Z_1}\right), \quad (1)$$

其中 \pm 号为该平面光学元件左右之光场, $\otimes \otimes$ 为两维卷积, 二次项因子 $q\left(x, y; \frac{1}{\lambda Z}\right)$

收稿日期: 1984年6月19日; 收到修改稿日期: 1984年12月25日

* 在分析中将忽略一切共有常数项因子, 这并不影响最终结果。

$= \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda Z}(x^2 + y^2)\right]$ 。此式是从近似菲涅耳衍射理论得到的^[11]。若令光栅 G_2 的周期为 T_2 , 则

$$G_2(x, y) = \sum_m b_m \exp\left[i\frac{2\pi m x}{T_2}\right]。 \quad (2)$$

所以

$$e_2^+(x, y) = q\left(x - \xi, y - \eta; \frac{1}{\lambda Z_1}\right) \times \sum_m b_m \exp\left(i\frac{2\pi m x}{T_2}\right),$$

其中相对于 m 级衍射的分量为

$$e_{2(m)}^+(x, y) = b_m q\left(x - \xi, y - \eta; \frac{1}{\lambda Z_1}\right) \times \exp\left(i\frac{2\pi m x}{T_2}\right)。 \quad (3)$$

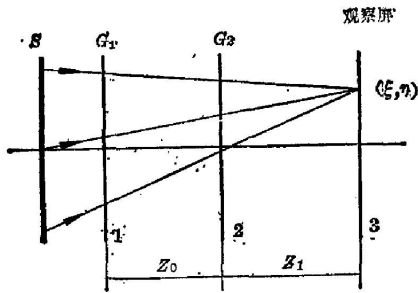


图 1 光栅成像装置

Fig. 1 Arrangement for grating imaging

同样由近似菲涅耳衍射

$$e_{1(m)}^-(x, y) = e_{2(m)}^+(x, y) \otimes \otimes q\left(x, y; \frac{1}{\lambda Z_0}\right) = b_m q\left(x, y; \frac{1}{\lambda Z_0}\right) q^*\left(\frac{x}{\lambda Z_0} + \frac{\xi}{\lambda Z_1} - \frac{m}{T_2}, \frac{y}{\lambda Z_0} + \frac{\eta}{\lambda Z_1}; \frac{\lambda Z_0 Z_1}{Z_0 + Z_1}\right)。 \quad (4)$$

令 G_1 光栅周期为 T_1 , 则

$$G_1(x, y) = \sum_n a_n \exp\left(i\frac{2\pi n x}{T_1}\right)。 \quad (5)$$

通过 G_2 的 m 级衍射和 G_1 的 n 级衍射后产生的光场分布, 经展开后,

$$e_{1(nm)}^+(x, y) = a_n b_m q\left(x, y; \frac{1}{\lambda(Z_0 + Z_1)}\right) \exp\left[i2\pi \frac{\xi x + \eta y}{\lambda(Z_0 + Z_1)}\right] \times \exp\left[i\pi \frac{Z_0(\xi^2 + \eta^2)}{\lambda Z_1(Z_1 + Z_0)}\right] \exp\left\{i\left[2\pi \frac{m \times Z_1}{T_2(Z_0 + Z_1)} + 2\pi \frac{m \xi Z_0}{T_2(Z_0 + Z_1)} - \pi \frac{m^2 \lambda Z_0 Z_1}{T_2^2(Z_0 + Z_1)} + 2\pi \frac{n x}{T_1}\right]\right\}。 \quad (6)$$

我们可以令 $m = n = 0$ 来试探此式所含有的波面的形式, 显然

$$e_{1(00)}^+(x, y) = a_0 b_0 q\left(x, y; \frac{1}{\lambda(Z_0 + Z_1)}\right) \exp\left[-i2\pi \frac{\xi x + \eta y}{\lambda(Z_0 + Z_1)}\right] \times \exp\left[-i\pi \frac{Z_0(\xi^2 + \eta^2)}{\lambda Z_1(Z_0 + Z_1)}\right]。 \quad (7)$$

这里二次项相位因子和线性相位因子表示一个倾斜球面波, 它就是无光栅情况下由观察点 (ξ, η) 在平面 1 上对应的波前。第三项相位因子表示与观察点位置有关的相位延迟, 如上面已提及过的, 是可以消除不计的公共常数因子。因此在扩展光源中所具有的这个倾斜球面波照明下, 观察点上的光场由 (6) 式可得

$$E_{3(n, m)}(\xi, \eta; \lambda) = a_n b_m \exp i \left\{ 2\pi x \left[\frac{m Z_1}{T_2(Z_0 + Z_1)} + \frac{n}{T_1} \right] + 2\pi \frac{m \xi Z_0}{T_2(Z_0 + Z_1)} - \pi \frac{m^2 \lambda Z_0 Z_1}{T_2^2(Z_0 + Z_1)} \right\}, \quad (8)$$

事实上该点光场由 $\sum_n \sum_m E_{3(nm)}$ 叠加组成, n 和 m 取 $-\infty$ 至 ∞ 。我们先分析由 n 和 m 级衍射产生的波和 n' 和 m' 级衍射产生的波之间二波合成在观察屏上的强度分布, 即

$$I_{3(nm, n'm')} = |E_{3(nm)} + E_{3(n'm')}|^2 = a_n^2 b_m^2 + a_{n'}^2 b_{m'}^2 + 2a_n b_m a_{n'} b_{m'} \times \cos \left[2\pi x \left(\frac{(m-m')Z_1}{(Z_0+Z_1)T_2} + \frac{n-n'}{T_1} \right) + 2\pi \xi \frac{(m-m')Z_0}{(Z_0+Z_1)T_3} - \pi \frac{\lambda Z_0 Z_1 (m^2 - m'^2)}{T_2^2 (Z_0 + Z_1)} \right]. \quad (9)$$

注意其中包含有与 x 有关的项, 只有在相位因子中消除该项才能在扩展光源下产生干涉条纹。这个条件可置 x 有关的项为零而得, 即产生聚焦成像条件

$$Z_1 = -Z_0 / \left[1 + \frac{T_1(m-m')}{T_2(n-n')} \right]. \quad (10)$$

代回(9)式

$$I_{3(nm, n'm')}(\xi, \eta; \lambda) = a_n^2 b_m^2 + a_{n'}^2 b_{m'}^2 + 2a_n b_m a_{n'} b_{m'} \times \cos \left[2\pi \xi \left(\frac{n-n'}{T_1} + \frac{m-m'}{T_2} \right) + \frac{\pi \lambda Z_0}{T_1 T_2} (n-n')(m+m') \right]. \quad (11)$$

观察屏上出现平行干涉条纹, 间隔 $\frac{1}{T} = \frac{n-n'}{T_1} + \frac{m-m'}{T_2}$ 。

当使用白光照明时为得到消色干涉条纹, 除应满足(10)式外, 还需使(11)式中与波长有关的因子为零, 即消色条件为

$$n = n' \quad \text{或} \quad m = -m'. \quad (12)$$

这里当 $n = n'$ 时, 若 $m \neq m'$, 则 $Z_1 = 0$, 无意义; 若 $m = m'$, 则不成为两个波合成了。

至此比较文献 [9], (10)式和(11)式已取得相同的结果。

如上所述, 干涉条纹可以看作第一光栅的像, 第二光栅的作用如同透镜, 当然这种作用完全不是几何光学所能描述的。同样由(10)式可以得到类似透镜的成像公式:

$$\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{f_a}, \quad (13)$$

$$f_a = -Z_0 \frac{T_2(n-n')}{T_1(m-m')}. \quad (14)$$

当所有的衍射波都利用上时, 观察屏上强度为

$$I_3(\xi, \eta; \lambda) = \sum_n \sum_m \sum_{n'} \sum_{m'} b_n b_m a_n^* b_m^* \exp \left\{ i2\pi x \left[\frac{(m-m')Z_1}{(Z_0+Z_1)T_2} + \frac{n-n'}{T_1} \right] \right\} \times \exp \left[i2\pi \xi \frac{m-m'}{T_2(Z_0+Z_1)} \right] \exp \left[-i\pi \frac{\lambda Z_0 Z_1 (m^2 - m'^2)}{T_2^2 (Z_0 + Z_1)} \right]. \quad (15)$$

(15)式表现了无穷多个干涉的叠加, 同样当(10)式满足下其干涉组能够定位。这时只有 $(m-m')/(n-n') = K$ 常数的这些干涉组存在, 其它各种干涉组混成背景, 所以各个 k 值表示了在不同像距 Z_1 上出现的一组不同的干涉。而当(12)式满足的那些干涉是消色的。

可以清楚地看到这种光栅成像干涉的物理图像。观察屏上某一观察点来自于扩展光源的照明, 其中只有与观察点对应的倾斜球面波能产生干涉, 这个球面波经受两光栅的衍射, 而只有满足(10)式成像距离关系的二束经受不同衍射级次的分光光束才能相互间干涉, 而引起观察点亮度的变化, 这样便在观察面上产生干涉图, 其它衍射将混为背景。这种干涉

图相当于 G_1 光栅的像。广而言之,在这像距下也只有(17)式的 K 常数的这些衍射波能产生同一种干涉条纹。白光照明下衍射级次满足(12)式将产生消色条纹。由此可见这种干涉是同一照明波前分光复合后的自干涉,观察面上任二点之间是不相干的,它完全不同于一般情况下的双光束或多光束干涉,这是波面整体间的干涉。

二、Lau 效 应

Lau 效应可由图 2 的装置观察,相当于光栅成像实验中的两光栅周期相等且用焦距 f 的透镜使观察屏位于无穷远位置上。

这里仍用反向脉冲传递法分析,当然相等效的是可对光栅成像分析中取 $Z_1 \rightarrow \infty$ 和 $T_1 = T_2 = T$ 来求得。

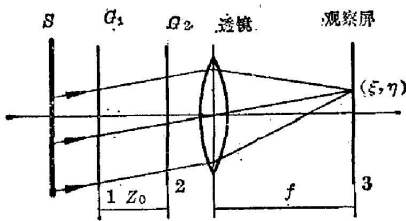


图 2 Lau 实验

Fig. 2 Lau's experiment

显然,忽略常数项因子下,相应于观察点 (ξ, η) 在 G_2 平面上的场分布为 $\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi + y\eta)\right]$ 。因此

$$e_{2(m)}^+(x, y) = b_m \exp\left(i2\pi \frac{mx}{T}\right) \times \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi + y\eta)\right]。 \quad (16)$$

进而

$$\begin{aligned} e_{1(m)}^-(x, y) &= e_{2(m)}^+(x, y) \otimes \otimes q\left(x, y; \frac{1}{\lambda Z_0}\right) \\ &= b_m \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi + y\eta)\right] \exp\left[i\left(2\pi \frac{mx}{T} + 2\pi \frac{m\xi Z_0}{fT} - \pi \frac{\lambda m^2 Z_0}{T^2}\right)\right] \\ &\quad \times \exp\left[-i\frac{\pi Z_0}{\lambda f^2}(\xi^2 + \eta^2)\right]。 \end{aligned} \quad (17)$$

反向脉冲通过 G_2 的 m 级和 G_1 的 n 级衍射后在平面 1 上的场强分布即为

$$\begin{aligned} e_{1(mn)}^+(x, y) &= a_n \exp\left[i\frac{2\pi nx}{T}\right] e_{1(m)}^- = a_n b_m \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi + y\eta)\right] \\ &\quad \times \exp\left\{i\left[2\pi \frac{x(m+n)}{T} + 2\pi \frac{m\xi Z_0}{fT} - \pi \frac{\lambda m^2 Z_0}{T^2}\right]\right\} \exp\left[-i\frac{\pi Z_0}{\lambda f^2}(\xi^2 + \eta^2)\right]。 \end{aligned} \quad (18)$$

在扩展光源中 $\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\xi + y\eta)\right]$ 的倾斜平面波照明下,再次忽略常数因子,观察点场强为

$$E_{3(mn)}(\xi, \eta; \lambda) = a_n b_m \exp\left\{i2\pi\left[\frac{x(m+n)}{T} + \frac{m\xi Z_0}{fT} - \frac{\lambda m^2 Z_0}{2T^2}\right]\right\}。 \quad (19)$$

所以观察屏上的强度分布

$$\begin{aligned} I_3(\xi, \eta; \lambda) &= \sum_n \sum_m \sum_{n'} \sum_{m'} a_n b_m a_{n'}^* b_{m'}^* \exp\left[i\frac{2\pi x}{T}(m - m' + n - n')\right] \\ &\quad \times \exp\left[i\frac{2\pi \xi Z_0}{fT}(m - m')\right] \exp\left[-i\frac{\pi \lambda Z_0}{T^2}(m^2 - m'^2)\right]。 \end{aligned} \quad (20)$$

取得干涉条纹的条件是消除与 x 有关的项, 即

$$m - m' + n - n' = 0. \quad (21)$$

这相当于 $K = -1$ 。由此(20)式成为

$$I_3(\xi, \eta; \lambda) = \sum_n \sum_{m'} \sum_{n'} \sum_{m''} a_n b_m a_{n'}^* b_{m''}^* \exp \left[-i \frac{2\pi \xi Z_0}{fT} (n - n') \right] \\ \times \exp \left[-i \frac{\pi \lambda Z_0}{T^2} (m^2 - m'^2) \right] \delta_{m - m' + n - n'}. \quad (22)$$

这里 $\delta_{m - m' + n - n'}$ 为 Kronecker δ 函数, 当 $m - m' + n - n' = 0$ 时为 1, 其余为零。至此已求得与文献[9]相同的结果。假设光栅为二进制的函数, 即 $t = 0$ 或 $t = 1$, 这时 $t = |t|^2$ 。所以

$$\sum_n \sum_{n'} a_n a_{n'}^* \exp \left[-i \frac{2\pi Z_0 \xi}{fT} (n - n') \right] \delta_{m - m' + n - n'} \\ = \sum_k a_k \exp \left[-i \frac{2\pi k Z_0 \xi}{fT} \right] \delta_{k + m - m'},$$

其中 $k = n - n'$ 。(22)式简化为

$$I_3(\xi, \eta; \lambda) = \sum_k a_k \left\{ \sum_{m'} \sum_{m''} b_m b_{m''} \exp \left[-i \frac{\pi \lambda Z_0}{T^2} (m^2 - m'^2) \right] \delta_{k + m - m'} \right\} \\ \times \exp \left[i \frac{2\pi k Z_0 \xi}{fT} \right]. \quad (23)$$

由文献[4, 6~8], Lau 条件为

$$Z_0 = \frac{\alpha}{\beta} \frac{T^2}{\lambda}, \quad (24)$$

α 和 β 为整正数, α/β 应为有理数。因此

$$I_3(\xi, \eta; \lambda) = \sum_k \sum_m a_k b_m b_{m+k} \cos \left[\frac{2\pi k \xi Z_0}{Tf} + \frac{2\pi \alpha m k}{\beta} + \frac{\pi \alpha k^2}{\beta} \right]. \quad (25)$$

这是由基本周期为 $\frac{Tf}{Z_0}$ 的余弦叠加而成, 其相位延迟为 $\frac{2\pi \alpha m k}{\beta} + \frac{\pi \alpha k^2}{\beta}$ 。根据傅里叶分析, 周期性规则函数的傅里叶分量之间的相对相位差通常为 2π 或 π 的整数倍。因而当所述相位延迟为 π 的整数倍时, 余弦项可能同相叠加而产生较高对比度的 Lau 条纹。由此令

$$k = \beta l. \quad (26)$$

只取 k 值中的部分周期值, 这里 $l = 1, 2, 3, 4, \dots$ 。

当 $\alpha = 2, 4, 6, \dots$ 等偶数时, 相位因子不论 β 为何值均为 2π 的整数倍, 显然

$$I_3(\xi, \eta; \lambda) = \sum_l a_{\beta l} b_{\beta l} \cos \left(2\pi \frac{Z_0 \beta l}{fT} \xi \right). \quad (27)$$

当 $\alpha = 1, 3, 5, \dots$ 等奇数时, 若 β 取偶数, 相位因子也为 2π 的整数倍, 这时

$$I_3(\xi, \eta; \lambda) = \sum_l a_{\beta l} b_{\beta l} \cos \left(2\pi \frac{Z_0 \beta l}{fT} \xi \right). \quad (28)$$

而当 β 取奇数时, 相位因子随 l 为奇数或偶数而为 π 的奇数倍或偶数倍, 即有

$$I_3(\xi, \eta; \lambda) = \sum_l (-1)^l a_{\beta l} b_{\beta l} \cos \left(2\pi \frac{Z_0 \beta l}{fT} \xi \right). \quad (29)$$

可见前二项中余弦项完全同相叠加, 将产生高对比条纹。这些式中的 Lau 条纹周期 $fT/\beta Z_0$ 也可记作 $f\lambda/\alpha T$ 。上述公式已证明了 α/β 为任一有理数时均能得到较高对比度的 Lau 条纹。

事实上 $k \neq \beta l$ 下的 I_3 的大部分将表现为背景光强, 因此满足上述公式的 Lau 条纹将

在背景上产生。为得以观察它必须具有一定的强度和清晰度,式中强度正比于 $a_{bl}b_{bl}$ 。已知周期为 T 和开口为 $2a$ 的光栅的傅里叶谱频率为 $\frac{1}{T}$ 整数倍,而零点频率为 $\frac{1}{2a}$ 整数倍。为得到足够的 Lau 强度,可以考虑使 a_{bl} 和 b_{bl} 的第一级衍射($l=1$)落在光栅傅里叶谱的第一个零点($1/2a$)以内作为判据,即落在开口 $2a$ 狭缝的零级附近的衍射主峰内,则显然要求

$$\beta < \frac{T}{2a_1}, \quad \beta < \frac{T}{2a_2}. \quad (30)$$

这与文献[8]所述完全一致。

此外还注意到:若 $T/2a$ 为整数,当 $\beta=T/2a_1$ 时 $a_{bl}=0$,或者 $\beta=T/2a_2$ 时 $b_{bl}=0$,这时

$$I_s(\xi, \eta; \lambda) = 0. \quad (31)$$

至此, Lau 效应中出现的各种基本物理现象已用反向脉冲传递法得到了较完整的解释。

可以看到; Lau 效应中与观察点相对应的扩展照明光源中的倾斜平面波经过两个光栅的不同级次的衍射,只有满足 $K=-1$ 下的衍射波可能在观察点上产生干涉,进而当 Z_0 满足(24)式等的不同条件下将产生各种高对比度的 Lau 条纹。显然 Lau 效应是光栅成像现象的一种特例。

在白光照明下现象将更为复杂, Lau 干涉条纹将是彩色的。

参 考 文 献

- [1] L. Liu; *Appl. Opt.*, 1983, **22**, No. 19 (Oct), 3024.
- [2] 刘立人;《光学学报》,1984, **4**, No. 11 (Nov), 970.
- [3] 刘立人;《光学学报》,1985, **5**, No. 5 (May), 385.
- [4] J. Jahns, A. Lohmann; *Opt. Commun.*, 1979, **28**, No. 3 (Mar), 263.
- [5] H. O. Bartelt, J. Jahns; *Opt. Commun.*, 1979, **30**, No. 3 (Sep), 268.
- [6] R. Sudol, B. J. Thompson; *Opt. Commun.*, 1979, **31**, No. 2 (Nov), 105.
- [7] R. Sudol, B. J. Thompson; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 6 (Mar), 1107.
- [8] F. Gori; *Opt. Commun.*, 1979, **31**, No. 1 (Oct), 4.
- [9] G. J. Swanson, E. N. Leith; *J. O. S. A.*, 1982, **72**, No. 5 (May), 552.
- [10] K. H. Brenner, A. W. Lohmann *et al.*; *Opt. Commun.*, 1983, **46**, No. 1 (Jun), 14.
- [11] J. D. Gaskill; 《*Linear Systems, Fourier Transforms and Optics*》, (John Wiley & Sons, Inc., 1978), Chapter 10.

Study on phenomena of interference with extended white light illumination by backward impulse response

II. Lau effect and grating imaging

LIU LIREN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 19 June 1984; revised 25 December 1984)

Abstract

By means of the backward impulse response the phenomenon of grating imaging, wherein a grating is imaged by a second one, is analysed. As a special case, Lau effect is explained thoroughly. The mathematics is simpler while the physical meaning becomes clearer than in the case of other explanations.

《激光文摘》正式发行

本文摘为月刊, 每期约 700 条, 包括中外文期刊, 各国专利, 特种报告, 会议资料以及书籍介绍。内容有器件, 理论, 激光光谱, 非线性光学, 光电子学, 光纤通讯, 光信息技术, 核聚变和同位素分离, 激光在工、农、医、科技以及军事上的应用。

本刊由“科技文献出版社重庆分社”发行(注意: 不是邮局发行)。订阅办法: 请汇款到“重庆 2104 信箱发行科”。每期 1.50 元, 全年 12 期, 共 18.00 元。开户银行: 重庆市中区七星岗分理处。帐号 894547。

《光学学报》正在作读者情况调查, 务请有关方面的单位及读者注意本刊近几期插页。

《光学学报》编辑部

一九八五年五月