

# 相位直边像反映的光学系统某些特性

杨 健 伍树东 王之江

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## 提 要

通过分析 $\pi$ 相位直边像,得到了非相干因子 $\alpha$ ;提出了一种关于显微镜像质的评价方法及评价参数 $G$ ,认为成像系统的优劣取决于 $\pi$ 相位直边像的几何边缘强度值,并与中心亮度 $S$ 、 $D$ 的判据进行了比较。

众所周知,成像系统的性质可根据它对较高空间频率的传递能力来表现。由于强度直边物含有丰富的高频成分,强度直边像常被用作像质评价的依据;如文献[1]讨论了部分相干情况下,像差对直边像锐度等的影响。至今还没见到从这方面定量评价像质的适当参数。

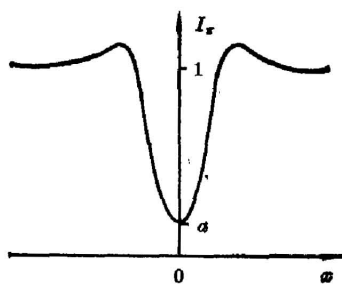


图 1

由于 $\pi$ 相位直边比强度直边有更多的高频成分,作者认为它能更充分地表现成像系统的性质,并将说明 $\pi$ 相位直边像(如图1所示)可以定量反映成像系统的相干性质和成像质量。

$\pi$ 相位直边用复振幅透射率函数

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ \exp(i\pi), & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

表示。当光学显微镜满足对称性时(以下的讨论都是在对称条件下进行),对此相位直边成像,得到图1所示的轮廓<sup>[2]</sup>;此曲线对称于几何边缘,边缘处的相对光强度用 $\alpha$ 表示:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= I_x(0)/I_x(\infty), \\ I_x(0) &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} J(x_0 - x'_0) h(x_0) h^*(x'_0) dx_0 dx'_0 - 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} J(x_0 + x'_0) h(x_0) h^*(x'_0) dx_0 dx'_0, \\ I_x(\infty) &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} J(x_0 - x'_0) h(x_0) h^*(x'_0) dx_0 dx'_0 + 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} J(x_0 + x'_0) h(x_0) h^*(x'_0) dx_0 dx'_0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$J$ 为物面互强度, $h$ 为点扩散函数。当成像系统相干参数 $S$ 改变时, $\alpha$ 值也要改变。

## 一、相干特性

光学显微镜的相干参数 $S = NA_c/NA_o$ ,  $NA_c$ 是聚光镜数值孔径,  $NA_o$ 是物镜数值孔径,当 $S$ 为零时,是相干成像;这时根据对称性得

$$J(x_0 - x'_0) = J(x_0 + x'_0) = \sqrt{I(x_0)I(x'_0)} \exp[i\phi(x_0) - i\phi(x'_0)], \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式得  $\alpha$  为零。当  $S$  为无穷大时,是非相干成像

$$J(x_0 - x'_0) = \sqrt{I(x_0)I(x'_0)} \delta(x_0 - x'_0), \quad (4)$$

这样,(2)式的末项积分为零,使得  $\alpha$  值为 1。一般情况下,  $\alpha$  和  $S$  有同向变化关系,  $\alpha$  值的变化域是  $[0, 1]$ 。

文献[2]分析了背景强度透过率为  $T$ 、位相突变量为  $\varphi$  的直边像,其几何边缘处在相干情况下光强  $T_c$ 、非相干情况下光强  $T_n$  和部分相干情况  $T_p$  的光强(直边阈值)公式分别是

$$\left. \begin{aligned} T_c &= 0.25(1+T+2\sqrt{T}\cos\varphi), \\ T_n &= 0.5(1+T), \\ T_p &= (1-\alpha)T_c + \alpha T_n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

这说明部分相干阈值是相干阈值和非相干阈值的带权叠加;因子  $\alpha$  反映了非相干成像在整个成像过程中所占的权重,因此本文定义  $\alpha$  为光学显微镜的非相干因子。

$\alpha$  不但比  $S$  更精确地描述相干特性,而且还能描述包含像差的广义相干特性。即像差导致 Airy 斑半径增大,把这看成是无像差时物镜数值孔径的减小,将导致相干性降低,表现为  $\alpha$  值增大。

## 二、像质评价参数 $C$

用来评价成像系统质量的方法有许多<sup>[3]</sup>,如光学传递函数(OTF)、中心亮度(S. D)等。但这些方法都没有考虑部分相干成像的特性,而且有些参数值难以直接测量。

考虑部分相干成像情况,像差会影响直边像几何边缘的光强值;从(5)式可见,  $T_c$  和  $T_n$  是不随对称像差而改变的,因此  $T_p$  随像差的改变量可完全由  $\alpha$  值的变化来决定;即  $\alpha$  值的大小包含了像差的信息。一般情况下,像差的增大将导致  $\alpha$  值增大。

在给定的相干参数下,令

$$C = (1 - \alpha_{\text{有像差}}) / (1 - \alpha_{\text{无像差}}), \quad (6)$$

则根据  $\alpha$  的表达式(2)式可得

$$C = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty J(x_0 + x'_0) h_a(x_0) h_a^*(x'_0) dx_0 dx'_0}{\int_0^\infty \int_0^\infty J(x_0 + x'_0) h(x_0) h^*(x'_0) dx_0 dx'_0}, \quad (7)$$

式中用  $h_a(x_0)$  来表示有像差的点扩散函数。像差的存在将使  $C$  值减小,当  $C$  值为 1 时,成像系统呈最佳状态。

对(7)式求极限,可得非相干照明情况下参数  $C$  的表达式

$$C_n = |h_a(0)|^2 / |h(0)|^2, \quad (8)$$

即  $C_n$  与中心亮度 S. D 等同。由(7)和(8)式可见,参数  $C$  评价像质时有如下两特点:

(1) 非相干成像时,像质的好坏取决于 Airy 斑的中心强度。

(2) 一般情况下,像质的好坏依赖于 Airy 斑的整体,随着相干性提高, Airy 斑各点光强和相位分布对成像的影响要增强。

这两点从非相干、部分相干及相干成像公式中点扩散函数所处的地位来看是相符合的。

非相干成像公式中是点扩散函数模平方与物强度函数的卷积,平方关系使得 Airy 斑不同部位对成像的贡献大小相差悬殊,所以只需考虑极大处光强就行了;相干成像公式中点扩散函数是以一次幂形式出现的;部分相干成像介于两者之间。

### 三、几个特例

存在像差的点扩散函数为<sup>[4]</sup>

$$h_a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d \xi) \exp[i(2\pi/\lambda)W(\lambda d \xi)] \exp(-i2\pi x \xi) d\xi, \quad (9)$$

其中  $P$  是物镜的孔径函数,  $d$  是被测物到光瞳的距离,  $W$  是光瞳面的波像差。当像差仅由离焦量  $\Delta$  产生时,那末波像差可写为  $W(x) = -\Delta \cdot x^2/d^2$ 。下面考虑几种特殊情况。

#### 1. 聚光镜和物镜数值孔径相当大

把物面互强度  $J(x)$  和点扩散函数  $h(x)$  写成

$$J(x) = \delta_\varepsilon(x), \quad h(x) = \delta_\varepsilon(x)。$$

当  $\varepsilon$  取得足够小,  $\varepsilon$  相当于点扩散函数的半宽度。

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (10)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x)。$$

将  $P=1$  代入(9)式,得  $h_a(x) = (1/\sqrt{\lambda|\Delta|}) \exp(-i\pi x^2/\lambda\Delta)$ , 因此

$$O = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty [\delta_\varepsilon(x_0+x'_0)/\lambda|\Delta|] \exp[-i(\pi/\lambda\Delta)(x_0^2-x'_0^2)] dx_0 dx'_0}{\int_0^\infty \int_0^\infty \delta_\varepsilon(x_0+x'_0) \delta_\varepsilon(x_0) \delta_\varepsilon(x'_0) dx_0 dx'_0} = 4\varepsilon^2/\lambda|\Delta|, \quad (11)$$

(11)式是在近似条件下得到的结果。在求  $h_a$  值时,实际已假定  $\varepsilon$  为零,因此(11)式右端在  $\Delta$  趋于零时不应趋于无穷大。由(7)式可知,  $\Delta$  为零时的  $O$  值为1。当  $\varepsilon$  为很小的有限值时,为使近似结果相容,取一个  $\Delta$  的下限值  $\Delta_0$ , 使满足  $\Delta_0 = 4\varepsilon^2/\lambda$ 。于是可得

$$O = \Delta_0/|\Delta|。 \quad (12)$$

(12)式说明参数  $O$  与高焦量成反比关系。

#### 2. 物镜孔径函数呈高斯型

将物面互强度  $J(x)$  和物镜孔径函数  $P(x)$  写成

$$J(x) = \delta_\varepsilon(x), \quad P(x) = \exp(-\pi\mu x^2/d^2),$$

则可求得

$$\left. \begin{aligned} h(x) &= \exp(-\pi x^2/\lambda\mu^2)/\lambda\sqrt{\mu}, \\ h_a(x) &= (\lambda\mu^2 - i\lambda\Delta)^{-1/2} \exp[-\pi x^2/(\lambda^2\mu - i\lambda\Delta)], \\ O &= [1 + (\Delta/\mu\lambda)^2]^{-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

由(13)式可知,当  $\mu$  较小时,  $O$  对小离焦量的变化较灵敏;当  $\mu$  较大时,  $O$  对大离焦的变化较灵敏。

### 3. 实际的孔径函数

实际的孔径函数很难得到  $O$  与像差的简洁关系式。但可以通过  $\pi$  相位直边像的数值积分来获得  $O$  与像差的关系；也可以根据强度直边像的有关数值间接得到这种关系。当没有背景透射时，(5)式便化成

$$T_p = 0.25(1+a)。$$

因此可用边缘点光强与像差的关系来推得  $a$  与像差的关系。文献[1]中图 11~13 是不同相干照明情况下的离焦直边像，从中可得如下三个性质：

- (1) 边缘点光强值随离焦量增加而增大(除不能区分的数值外)；
- (2) 对任意相干参数  $S$  及任意离焦量都满足  $I(0)$  不小于 0.25，也就是  $a$  不小于零；
- (3) 相干度较高( $S=0.2$ )时， $I(0)$  对小离焦量的变化不灵敏； $S$  为 0.6 时，在较大范围内  $I(0)$  能灵敏反映出离焦量的变化； $S$  为 1 时， $I(0)$  对小像差灵敏。由于  $da/dT_p=4$ ， $a$  的变化比  $I(0)$  还要灵敏 4 倍。

文献 [1] 中图 14~16 是波象差  $W(x, y) = c_{22}y^2$  的直边像，同样它也有上述三个性质。

## 四、小像差情况

在小像差近似下，有

$$\exp(i2\pi W/\lambda) \approx 1 + i2\pi W/\lambda,$$

由(7)式可求得

$$O = 1 - (2\pi/\lambda)^2 E', \quad (14)$$

其中

$$E' = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty W^2(x_1) \rho(x_1, x'_1) P(x_1) P(x'_1) dx_1 dx'_1 - \int_0^\infty \int_0^\infty W(x_1) W(x'_1) \rho(x_1, x'_1) P(x_1) P(x'_1) dx_1 dx'_1}{\int_0^\infty \int_0^\infty \rho(x_1, x'_1) P(x_1) P(x'_1) dx_1 dx'_1}$$

$$\rho(x_1, x'_1) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty J(x_0 + x'_0) \cos\left(\frac{2\pi x_1 x_0}{\lambda d}\right) \cos\left(\frac{2\pi x'_1 x'_0}{\lambda d}\right) dx_0 dx'_0,$$

而中心亮度在小像差近似下的表达式为

$$S. D = 1 - (2\pi/\lambda)^2 E, \quad (15)$$

S. D 中的  $E$  为像差在出瞳面的均方差，而  $O$  中的  $E'$  为带权方差， $\rho$  为复权重函数。根据参数  $O$  可认为出瞳各点的波像差对像质的影响是不均等的，孔中心的波像差对像质的影响最大。当  $\rho$  恒为 1 时， $E'$  便退化成均方差，它对应着非相干成像条件。从此角度看来，通常人们衡量像差系统而使用的均方差值对非相干成像合适，但对部分相干成像来说便有些欠妥。

## 五、相干情况

相干成像情况下，由于  $a$  恒为零， $O$  值已不能反映出像差的存在，但  $\pi$  相位直边像仍能

反映成像系统的某些重要信息,例如从直边像轮廓可求得 Airy 斑的大小。根据相干成像公式

$$I(x) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(x') h(x-x') dx' \right|^2, \quad (16)$$

将(1)式代入(16)式,经归一化后得

$$I(x) = \left| \int_0^x h(x') dx' \right|^2 / \left| \int_0^{\infty} h(x') dx' \right|^2. \quad (17)$$

当点扩散函数是实函数时,由(17)式可知,在函数  $h$  通过  $x$  轴的点  $I(x)$  达极值,因此可由  $\pi$  相位直边像极值对应的位置而得到 Airy 斑半径的大小。

若  $h(x) = \sin(2\pi N A_0 x / \lambda) / (2\pi N A_0 x / \lambda)$ , 则  $I(x)$  的极值点分别落在  $\pm \frac{\lambda}{2N A_0}$ ,  $\pm \frac{2\lambda}{2N A_0} \dots$ 。如图 2 所示,从中可测得  $N A_0$  的值。(图中横标  $x = \lambda / 2 N A_0$ )。

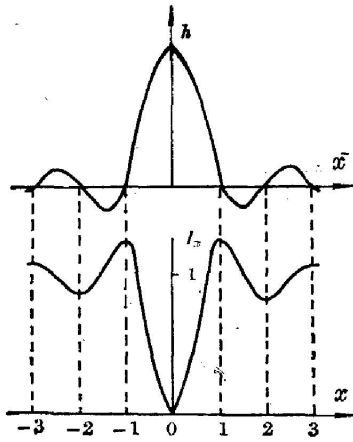


图 2

## 六、检测方法

制作一块无吸收的  $\pi$  相位直边板,在给定的参数下,将它看作被测物体,用被检测物镜对  $\pi$  相位直边板成像,通过光电扫描装置测出直边像的轮廓;其对应几何边缘的强度就是  $\alpha$  值。虽然此法不能测得无像差时的  $\alpha$  值,但可以通过测量值之间相互比较,或与计算值比较来定量判断被检测物镜的优劣。

## 七、讨 论

(1) 对于部分相干成像,  $O$  值能反映像差、反映成像特性,并且其值可测;因此将它作为像质评价参数是合适的。

(2) 在某些相干参数下  $O$  值对像差的反映不灵敏,说明参数  $O$  有个最佳适用范围,具体区域范围要通过数值积分才能得知。

(3) 用 S. D 评价像质时,是不考虑部分相干的,它只表现参数  $O$  的一个特殊情况;如果说  $O$  是比较好的像质评价参数,则我们认为 S. D 只适用于非相干情况的像质评价。

(4) 相干情况下的  $\pi$  相位直边像与点扩散函数有直接的对应关系,从直边像可得到点扩散函数的一些重要信息。

本文的推导只局限一维成像系统,其结果可推广到二维。由于参数  $O$  有上述一系列特点,可将它应用于实际光学显微镜物镜的检测。

本文作者曾与中国科学院上海光学精密机械研究所全息信息组的同志们进行了有益讨论,在此谨致谢意。

## 参 考 文 献

- [1] 庄松林等;《物理学报》, 1979, **28**, No. 5 (May), 657.
- [2] 杨健等;《光学学报》, 1984, **4**, No. 12 (Dec), 1067.
- [3] H. H. Hopkins; *Proc. SPIE*, 1974, **46**, 2.
- [4] J. W. 顾德门;《傅里叶光学导论》, (科学出版社, 1979 中译本), 126.

**Characteristics of optical systems with  $\pi$ -phase edge image**

YANG JIAN WU SHUDONG AND WANG ZHIJIANG

*(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)*

(Received 12 October 1984; revised 12 December 1984)

**Abstract**

Through analysis of  $\pi$ -phase edge image profiles, we obtain an incoherence factor  $\alpha$  and propose an evaluation method for optical microscopes with evaluation parameter  $C$ . It has been found that the quality of the imaging system depends on  $\alpha$ . Finally, comparisons are made between parameter  $C$  and Strehl ratio  $S$ . D.