

# 费米折射率分布的平面光波导的模式

杨指南 陈侗嵘  
(成都电讯工程学院)

## 提 要

严格求解了折射率分布可用费米函数描述的平面光波导的波动方程。获得了仅用熟知的特殊函数表示的场解。精确的模式色散方程是收敛很快的模式折射率的无穷函数项级数, 仅取零级近似便能得到相当精确的结果。

## 一、引 言

平面光波导的制备和特性是集成光学和导波光学的重要研究内容之一。用扩散法制备的平面光波导具有渐变的折射率分布, 采用适当的解析函数来描述渐变折射率波导, 并严格求解波动方程是研究平面波导的重要方法。迄今为止, 已采用指数函数<sup>[1]</sup>、线性函数<sup>[2]</sup>、抛物线函数和高斯函数<sup>[3]</sup>来描述平面光波导的折射率分布, 且已获得了解析解。

近年来, 用质子(离子)交换方法来制备波导, 由于工艺简单, 成膜质量好等一系列优点, 引起了广泛的注意。然而, 用质子(离子)交换工艺制备的平面光波导具有接近阶跃的折射率分布。显然, 用描述渐变折射率分布的典型函数来处理准阶跃分布误差较大, 而用阶跃分布模型来处理又不能说明其渐变性。文献[4]阐明费米函数可以恰当地描述这类波导的“接近阶跃”和“渐变”的双重特性, 该文用适当的函数近似费米函数, 由光线理论导出了解析形式的模方程。

为了准确地了解费米折射率分布平面光波导的模式, 或从由实验测得的模谱来准确地分析波导的参数, 本文严格求解了费米折射率分布的平面光波导的波动方程。获得了用超几何函数表示的严格场解和无穷收敛级数形式的精确模式色散方程。仅用零级近似的色散方程便能得到相当准确的结果。

## 二、折射率分布的费米模型

在描述固熔体波导的折射率分布时, Tien<sup>[5]</sup>首先引入了费米模型:

$$n(x) = \begin{cases} n_b + \Delta n \cdot \left[ 1 + \exp\left(\frac{x-d}{a}\right) \right]^{-1} & (x \geq 0), \\ 1 & (x < 0), \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\Delta n$  为表面折射率  $n_s$  与衬底折射率  $n_b$  之差,  $x$  是离开波导表面的距离。为使  $n(0) = n_s$ , 文献[4]把(1)式修改为

收稿日期: 1984年7月30日; 收到修改稿日期: 1984年10月5日

$$n^2(x) = \begin{cases} n_0^2 + \Delta n^2 \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{d}{a}\right) + \exp\left(\frac{x-d}{a}\right) \right]^{-1}, \\ 1, \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\Delta n^2 = n_s^2 - n_0^2$ 。

以上的  $d$  是与波导厚度有关的参数,  $a$  是与折射率分布形状有关的参数。在准阶跃情形,  $\frac{d}{a}$  约为 10, 因而可视  $e^{-\frac{d}{a}}$  为零。虽然质子(离子)交换平面光波导的  $\Delta n$  比扩散光波导的  $\Delta n$  大, 但仍有  $\frac{\Delta n}{n_0} \ll 1$ 。所以实际上(1)式和(2)式是一致的, 是同一折射率分布的不同阶次描述。本文设  $x < 0$  区域的折射率为  $n_0$ , 且仅处理(2)式的情形。而把  $d$  理解为折射率分布曲线的半宽度, 折射率变化的大约 40% 发生在以  $d$  为中心, 宽度为  $2a$  的距离上(见图)。由于费米函数具有两个参数可供选择, 用来描述折射率分布有更大的灵活性。

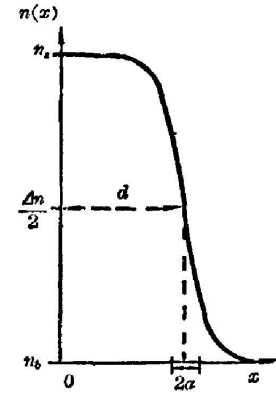


图 费米折射率分布曲线  
Fig. Fermi index profile

### 三、波动方程的解

设电磁波沿  $z$  向传播(波导界面位于  $yz$  坐标面上)。由麦克斯韦尔方程组易知场与时间无关的部分可以写为

$$\left. \begin{array}{l} \text{TE 模:} \\ \text{TM 模:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} E_y \\ H_y \end{array} = \exp(i\beta z) f(x), \quad (3)$$

而振幅  $f(x)$  所满足的波动方程则成为

$$\text{TE 模:} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} - k^2 [N^2 - n^2(x)] f = 0, \quad (4)$$

$$\text{TM 模:} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{n^2(x)} \frac{dn^2(x)}{dx} \frac{df}{dx} - k^2 [N^2 - n^2(x)] f = 0, \quad (5)$$

其中,  $k$  为真空波数,  $N = \frac{k_z}{k}$ ,  $k_z$  为  $z$  向传播常数。

先看 TE 模的情形。定义新的独立变量和无量纲常数如下:

$$\zeta = -e^{-\frac{x-d}{a}} / l, \quad (6)$$

$$l = e^{d/a} / (e^{d/a} - 1), \quad (7)$$

$$\eta^2 = a^2 k^2 (N^2 - n_0^2), \quad (8)$$

$$\tau_0^2 = a^2 k^2 l \Delta n^2, \quad (9)$$

$$\tau^2 = \tau_0^2 - \eta^2. \quad (10)$$

研究(4)式的渐近行为, 得知  $x \rightarrow \infty$  时  $f \rightarrow \exp\left(-\frac{\eta}{a} x\right)$ , 所以设在  $x \geq 0$  区域内方程(6)的解为

$$\mathcal{F}(\zeta) = \zeta^\eta u(\zeta). \quad (11)$$

把(2)式代入(4)式, 引用以上定义的无量纲常数和独立变量, 经若干运算, 可把(4)式化为

$$\zeta(1-\zeta)\frac{d^2u}{d\zeta^2} + (1-\zeta)(1+2\eta)\frac{du}{d\zeta} - \tau_0^2 u(\zeta) = 0, \quad (12)$$

此为超几何方程, 在  $|\zeta| < 1$  区域的解为

$$u(\zeta) = c_0 F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) + c_1 F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \zeta) \zeta^{1-\gamma}, \quad (13)$$

其中,  $c_0$  和  $c_1$  为待定常数,  $F$  为超几何函数:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j (\beta)_j}{j! (\gamma)_j} \zeta^j \quad |\zeta| < 1, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda)_0 &= 1, \\ (\lambda)_j &= \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+j-1) = \frac{\Gamma(\lambda+j)}{\Gamma(\lambda)} \quad (j \geq 1), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\gamma = 1 + 2\eta, \quad \alpha = \eta + i\tau, \quad \beta = \eta - i\tau. \quad (16)$$

场  $\mathcal{F}$  在  $\zeta \rightarrow 0$  (即  $x \rightarrow \infty$ ) 时应为有限这一自然边界条件导致  $c_1 = 0$ 。所以在  $|\zeta| < 1$  区域内的场解为

$$\mathcal{F}_1(\zeta) = c_0 \zeta^\eta F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta). \quad (17)$$

利用公式线性变换  $\xi = \zeta/(\zeta-1)$  可得  $|\xi| < 1$  (即  $x \geq 0$ ) 区域中收敛的场解为

$$\mathcal{F}_2(\zeta) = c_0 \zeta^\eta (1-\zeta)^\alpha F[\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \zeta/(\zeta-1)]. \quad (18)$$

求模方程时要利用  $x=0$  (即  $\zeta=1-e^{i/a}$ ) 处场连续的边界条件, 从而涉及  $x=0$  处场的计算, 此时宜采用以下的场解

$$\mathcal{F}_3(\zeta) = c_0 (-1)^{-\eta} [c(-\zeta)^{-i\tau} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \zeta^{-1}) + c.c.], \quad (19)$$

其中,  $c.c.$  表复数共轭, 而常数  $c$  则为

$$c = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}. \quad (20)$$

在 TM 模情形, 令  $H_y$  的振幅为

$$f(x) = n(x)W(x), \quad (21)$$

只要满足条件

$$a \gg \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi n_0} \quad (\lambda \text{ 为波长}), \quad (22)$$

则由方程(5)得出的关于  $W$  的方程中, 有关  $\frac{d^2n}{dx^2}$  和  $\left(\frac{dn}{dx}\right)^2$  的项便可忽略, 关于  $W$  的方程便归结为 TE 模的方程(4)。条件(22)是由式

$$\left| \frac{\tau_0^2 \zeta}{a^2(1-\zeta)} \right| \gg \left| \frac{2}{n^2} \left(\frac{dn}{dx}\right)^2 - \frac{1}{n} \frac{d^2n}{dx^2} \right|$$

导出的。所以, 只要折射率差较小(即  $\Delta n \ll n_0$ )且变化不太快, 则 TE 模场乘以因子  $n(x)$  便得 TM 模场。

#### 四、模式色散方程

设在  $x < 0$  区域内场是指数衰减的:

$$\mathcal{F}_0(x) = A \exp[hx/a], \quad (23)$$

其中,  $A$  为待定常数, 无量纲常数  $h$  为

$$h^2 = a^2 k^2 (N^2 - n_0^2). \quad (24)$$

由  $E_y$  在  $x=0$  处连续, 有

$$A = c_0 (-1)^{-\tau} [c (-\zeta_0)^{-i\tau} F_c + c.c.], \quad (25)$$

式中为简单起见, 记  $F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \zeta_0^{-1})$  为  $F_c$ , 而  $\zeta_0$  为  $\zeta(x=0)$ 。

由  $H_z$  在  $x=0$  处连续, 可得

$$hA = (-1)^{-\tau} c_0 \{c (-\zeta_0)^{-i\tau} [(i\tau - \alpha) F_c + \alpha_c F(\alpha + 1)] + c.c.\}, \quad (26)$$

其中, 利用了  $\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, \zeta)}{d\zeta} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, \zeta)$

和  $\gamma F = \beta \zeta F(\beta + 1, \gamma + 1) - \gamma F(\alpha - 1) = 0$

两个关系式。有非零场解的要求导致久期方程

$$\begin{vmatrix} 1 & c (-\zeta_0)^{-i\tau} F_c + c.c. \\ h & c (-\zeta_0)^{-i\tau} [(i\tau - \alpha) F_c + \alpha F_c(\alpha + 1) + c.c.] \end{vmatrix} = 0, \quad (27)$$

于是

$$\frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\beta)} (-\zeta_0)^{-i\tau} \sum_{j=0}^{\infty} (h - i\tau - j) \frac{(\alpha)_j (\alpha + \gamma + 1)_j}{j! (\alpha - \beta + 1)_j} \zeta_0^{-j} + c.c. = 0. \quad (28)$$

方程(28)即为 TE 模的模式色散方程, 它确定了允许导模的分立  $N$  值。由于(28)式为一无穷级数, 因而要想完全精确求解  $N$  将是困难的。幸而因  $\zeta_0^{-1}$  很小 ( $|\zeta_0^{-1}| \approx e^{i/a}$ , 在一般情况的下小于  $10^{-4}$ ), 采用很少的几项便可得到相当精确的结果。考虑零级 ( $j=0$ ) 近似, 由(28)式有:

$$\frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\beta)} (-\zeta_0)^{-i\tau} (h - i\tau) + c.c. = 0, \quad (29)$$

这要求相乘的各复数的幅角之和为  $\frac{\pi}{2}$  的奇数倍。为简明起见, 记

$$\arg\left[\frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\beta)}\right] = \arg(B), \quad \ln(e^{i/a} - 1) = \delta, \quad (30)$$

得

$$\delta\tau + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{h}\right) - \arg(B) = (2m + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (31)$$

其中,  $\arg(B)$  可用  $\Gamma$  函数的 Weierstrass 无穷乘积定义求得

$$\arg(B) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{\eta}\right) + \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\tau}{p}\right) - 2 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{p + \eta}\right) \right], \quad (32)$$

其中的无穷求和项正是两曲边梯形面积之差的矩形近似。设  $q$  为远大于  $\tau$  的正整数, 则当无穷求和进行到求和变量  $p$  等于  $q - 1$  时, 剩下的无穷项求和可用积分来近似。这一过程的结果为

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left[ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\tau}{p}\right) - 2 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{p + \eta}\right) \right] \approx \sum_{p=1}^{q-1} \left[ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\tau}{p}\right) - 2 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{p + \eta}\right) \right] - R(q), \quad (33)$$

其中

$$R(q) = q \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\tau}{q}\right) - 2(q + \eta) \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{p + \eta}\right) + \tau \ln \left[ \frac{q^2 + 4\tau^2}{(q + \eta)^2 + \tau^2} \right], \quad (34)$$

它既可作为有限项求和近似无限项求和的误差估计, 又可作为误差的补偿。引用以上结果, 最终有零级近似的 TE 模的色散方程为

$$\delta\tau + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{h}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{\eta}\right) - \sum_{p=1}^{q-1} \left[ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\tau}{p}\right) - 2 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{p+\eta}\right) \right] + R(q) \\ = (m+1)\pi, \quad (m=0, 1, 2, \dots). \quad (35)$$

把上式的  $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{h}\right)$  用  $\operatorname{tg}^{-1}\left[\left(\frac{\tau}{h}\right)_1\right]$  代替, 即可得到一级近似的 TE 模色散方程。而

$$\left(\frac{\tau}{h}\right)_1 = [(1+4\tau^2)\zeta_0 + \tau_0^2(2h-3)]\tau / [(1+4\tau^2)\zeta_0 - \tau_0^2(2\tau^2+h-1)], \quad (36)$$

高级近似亦可依此类推。

类似地, 由  $x=0$  处的边界条件得 TM 模的精确模式色散方程为

$$\frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)} (-\zeta_0)^{-i\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{n_0^2}{n_s^2} h + \frac{\Delta n^2}{2n_s^2} e^{-j/a} - i\tau - j \right) \frac{(\alpha)_j (\beta)_j}{j! (\gamma)_j} \zeta_0^j + c. c = 0, \quad (37)$$

其中  $\beta_0 = \alpha - \gamma + 1$ ,  $\gamma_0 = \alpha - \beta + 1$ 。TM 模色散方程的零级近似除用  $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{n_0^2\tau}{n_s^2 h}\right)$  代替(35)式中的  $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{h}\right)$  外, 其余的项与(35)式同。

## 五、讨 论

我们的场解正确地描述了导模的行为。由(18)式知, 在  $x$  很大(即  $|\zeta| \ll 1$ ) 时, 场象  $e^{-\frac{\tau}{a}x}$ , 是指数衰减的; 而在  $x$  很小(即  $|\zeta| \gg 1$ ) 时, 场象  $e^{i\frac{\tau}{a}x}$ , 是振动的。对第  $m$  个导模, 其振动与衰减的转变, 由模式截止的概念, 可认为发生在模深度  $x_m$  处。在这里由费米折射率分布函数所确定的折射率  $n(x_m)$  等于该模式折射率  $N_m$ 。由于  $n(x)$  变化不大, TE 模场与 TM 模场很相似。解析模场的获得, 为进一步研究准阶跃折射率分布波导模式的激发、传播和耦合等问题提供了方便。

由模式色散方程可以得到波导的传播模数和模式折射率, 或相反地由模谱确定波导的参数。用(35)式计算的模折射率与实验测得的  $\text{Ti}_2\text{SO}_4$  离子交换玻璃波导模折射率的比较见表。计算中, 取  $q=100$ , 且计入了  $R(q)$  的贡献。由(35)式获得了正确的导模数, 计算的  $N_m$  值与观测值符合得很好。模式间隔随模阶的上升呈现出由小而大而又变小的趋势, 亦与实验结果相符。这与抛物和高斯模型的等间距不同, 也与阶跃模型的单调增大不一样。但需指出这种模式间隔并非费米分布模型的固有特性, 在参数的其它组合下, 也可能出现别种情况。表中未指明模群类别是由于 TE 模和 TM 模的本征值方程差别很小, 以致计算的  $N_m$  在小数点后第三位上没有差别。令  $m=1$ ,  $N_1=n_0$ , 则由(35)式便可得到如下的单模条件:

$$\delta\tau_0 + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau_0}{ab\sqrt{n_b^2-n_0^2}}\right) - \sum_{p=1}^q \left[ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\tau_0}{p}\right) - 2 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau_0}{p}\right) \right] + R'(q) = \frac{3}{2}\pi, \quad (38)$$

其中,  $R'(q)$  表示此时  $\tau=\tau_0$ ,  $\eta=0$  的  $R(q)$ 。上式的左边除以  $\pi$ , 然后减去  $\frac{1}{2}$ , 最后取整数, 便能得到最大模式数  $M$ 。

总之, 由于费米函数具有两个参数可供选择, 用来描述波导的折射率分布具有很大的适用性, 因而我们的结果也广泛适用于准阶跃折射率分布的平面光波导, 特别适用铌盐和苯甲酸质子交换波导和固熔体波导。

表  $\text{Ti}_2\text{SO}_4$  离子交换玻璃波导模折射率的观测值与理论计算值之比较  
 Table Comparison between observed and theoretically calculated  
 mode index of  $\text{Ti}_2\text{SO}_2$  ion-exchanged glass guide

模阶 $m$	$N_m$ 观测值	$N_m$ 理论值	偏差 $\Delta N_m$	模式间隔 $\Delta N_{m,m+1}$
0	1.6361	1.6353	+0.0008	0.0119
1	1.6243	1.6234	+0.0009	0.0164
2	1.6069	1.6070	-0.0001	0.0199
3	1.5861	1.5871	-0.0010	0.0222
4	1.5622	1.5649	-0.0027	0.0229
5	1.5399	1.5420	-0.0021	0.0207
6	1.5192	1.5212	-0.0020	
$n_g$	1.6428	1.6403	+0.0025	

$n_b: 1.5129$      $\lambda: 0.6328 \mu\text{m}$   
 拟合参数     $d: 3.17 \mu\text{m}$      $a: 0.35 \mu\text{m}$

## 参 考 文 献

- [1] E. M. Conwell; *Appl. Phys. Lett.*, 1973, **23**, No. 6, 328.  
 [2] D. Marcuse; *IEEE J. Q. E.*, 1973, **9**, 1000.  
 [3] I. Savatinova, E. Najakov; *Appl. Phys.*, 1975, **8**, No. 3, 245.  
 [4] 范俊清, 董贺超; 《光学学报》, 1984, **4**, No. 7 (Jul), 628.  
 [5] P. K. Tien *et al.*; *Appl. Phys. Lett.*, 1974, **24**, 503.

## Modes of a planar waveguide with Fermi index profile

YANG ZHINAN AND CHEN TIRONG

(Chengdu Institute of Radio Engineering)

(Received 30 July 1984; revised 5 October 1984)

## Abstract

Wave equations of a planar waveguide with Fermi index profile are studied theoretically. Analytical solutions have been obtained in terms of hypergeometric functions. It has been found that the characteristic equations can be expressed as rapidly converging infinite series of functions of the mode refractive index. Rather accurate results can be obtained by only taking the zeroth-order approximation.