

电子波经 Möllenstedt 双棱镜的传输

傅 淑 芬

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文引入 Möllenstedt 双棱镜对电子波的传递函数, 由 Kirchhoff 积分定理, 推导出经双棱镜后电子波在观察平面上的场强分布。对平面波和球面波入射的情况, 给出了场强分布的解析表达式, 最后给出衍射场强分布的一些数值结果, 讨论了场强分布与实验参量的关系。

在电子束干涉实验中使用的分束器有多种形式, 包括振幅分割和波前分割^[1], 但使用最广, 效果最好的一种是称为 Möllenstedt 双棱镜的分束器^[2], 它的作用原理与光学中的 Fresnel 双棱镜极其相似。它由一根直径约 $1\ \mu\text{m}$ (一般由石英或玻璃丝镀金而成) 的导电细丝和两块接地板组成, 当在丝上加一恒定电压时, 经过丝两侧的电子便向相反方向偏转, 从而实现分束作用。

棱镜的引入, 改变了电子束的传输特性, 从而改变了观察屏上物体的象和场强分布。这种改变可以用一个传递函数来描写, 并通过求 Kirchhoff 积分求得。

棱镜的传递函数和观察平面上的场分布

电子双棱镜的结构如图 1 所示。P 为导电细丝, 其半径为 r_0 ; g 为两接地平板, OM 为观察平面(可在电子束重迭区的任意位置)。

选取细丝所在平面为 XOY 平面, 丝的轴线与 Y 轴重合, 丝可视为无限长, 这样, 经棱镜传输的波可简化为 XOZ 平面内的一维问题。实验中放大和投影系统的作用, 不过是将 OM 上的像加以放大, 并不影响场的分布情况, 故我们感兴趣的只是 OM 上的场分布。

设入射到棱镜平面上的电子波具有振幅分布为 $U_i(x)$, 棱镜的传递函数可表示为

$$t_p(x) = \begin{cases} \exp(-ik\alpha|x|) & x \geq r_0, \\ 0 & x < r_0, \end{cases} \quad (1)$$

α 表示丝对电子束的偏转角, 它与加在丝上的电压成正比^[3], 当丝上无电压时, $\alpha=0$, 在观察平面 OM 上得到细丝的衍射花样。

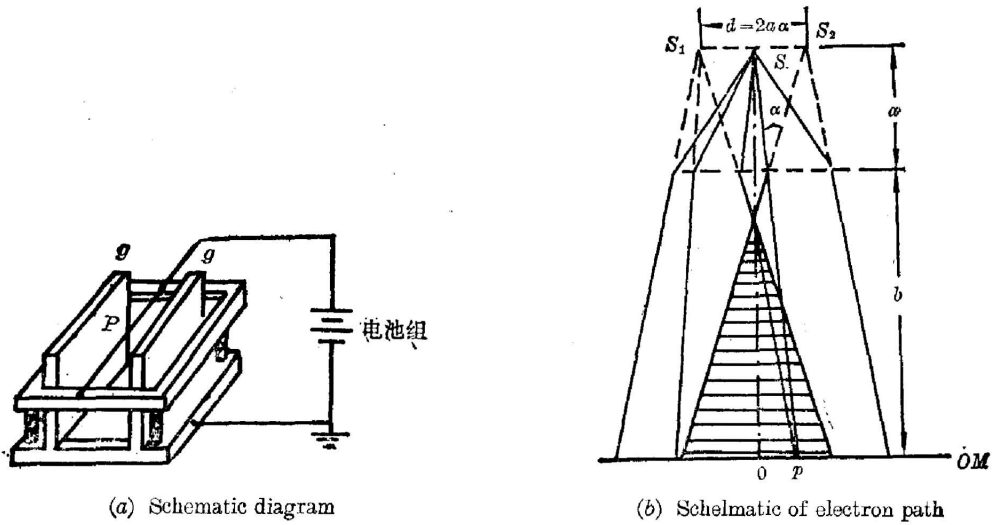
紧靠棱镜平面后的波振幅分布为^[4]

$$U_p(x) = t_p(x)U_i(x) = \begin{cases} U_0 \exp(-ik\alpha|x|) & x \geq r_0, \\ 0 & x < r_0, \end{cases} \quad (2)$$

观察平面上的波振幅分布由 Kirchhoff 积分给出

$$U_o(x) = \frac{1}{i\lambda l} \exp(ikl) \exp\left(\frac{ik}{2l}x^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} U_p(x') \exp\left(\frac{ik}{2l}x'^2\right) \exp\left(-\frac{ik}{l}xx'\right) dx', \quad (3)$$

l 是由棱镜平面到观察平面的距离。将(2)代入(3), 得到



(a) Schematic diagram

(b) Schematic of electron path

图 1 Möllenstedt 双棱镜

Fig. 1 Möllenstedt biprism

$$\begin{aligned}
 U_0(x) = & \frac{1}{i\lambda l} \exp(ikl) \exp\left(\frac{ik}{2l} x^2\right) \left\{ \int_{-\infty}^{-r_0} U_i(x) \exp(ik\alpha x') \exp\left(\frac{ik}{2l} x'^2\right) \right. \\
 & \times \exp\left(-\frac{ik}{l} xx'\right) dx' + \int_{r_0}^{\infty} U_i(x') \exp(-ik\alpha x') \exp\left(\frac{ik}{2l} x'^2\right) \\
 & \left. \times \exp\left(-\frac{ik}{l} xx'\right) dx' \right\}, \tag{4}
 \end{aligned}$$

已知入射波的振幅分布 $U_i(x)$, 便可由 (4) 式求得观察平面上的波振幅分布, 实验中观测到的是场强度分布 $I_0(x) = |U_0(x)|^2$. 显然这一分布依赖于参量 l, r_0, α .

平面波入射的情况

当入射到棱镜平面上的波为一平面波时,

$$U_i(x) = A_0, \tag{5}$$

式中 A_0 为一常数, 表示平面波的振幅. 将 (5) 代入 (4), 并作变量替换

$$\left. \begin{aligned}
 \xi &= \sqrt{\frac{2}{\lambda l}} (x' + 2l - x), \\
 \eta &= \sqrt{\frac{2}{\lambda l}} (x' - 2l - x), \\
 \beta^2(x) &= \frac{2}{\lambda l} (\alpha l - x)^2, \\
 \gamma^2(x) &= \frac{2}{\lambda l} (2l + x)^2,
 \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

由 (4) 式得到

$$\begin{aligned}
 U_0(x) = & \frac{A_0}{i\lambda l} \exp(ikl) \exp\left(\frac{ik}{2l} x^2\right) \sqrt{\frac{\lambda l}{2}} \\
 & \times \{ [c(\xi_2) + 0.5] + i[s(\xi_2) + 0.5] \} \exp\left(-\frac{i\pi}{2} \beta^2\right)
 \end{aligned}$$

$$+ \{ [0.5 - c(\eta_1)] + i[0.5 - s(\eta_1)] \} \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\gamma^2\right). \quad (8)$$

场强度分布为

$$\begin{aligned} I_0(x) = & \frac{A_0^2}{2\lambda l} \left(\left\{ [c(\xi_2) + 0.5] \cos \frac{\pi\beta^2}{2} + [s(\xi_2) + 0.5] \sin \frac{\pi\beta^2}{2}, \right. \right. \\ & + [0.5 - c(\eta_1)] \cos \frac{\pi\gamma^2}{2} [0.5 - s(\eta_1)] \sin \frac{\pi\gamma^2}{2} \left. \right\}^2 \\ & + \left\{ -[c(\xi_2) + 0.5] \sin \frac{\pi\beta^2}{2} + [s(\xi_2) + 0.5] \cos \frac{\pi\beta^2}{2} \right. \\ & \left. - [0.5 - c(\eta_1)] \sin \frac{\pi\gamma^2}{2} + [0.5 - s(\eta_1)] \cos \frac{\pi\gamma^2}{2} \right\}^2 \left. \right), \quad (9) \end{aligned}$$

式中 $c(x)$, $s(x)$ 为 Fresnel 积分, 其值可由表查出^[5]。

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \sqrt{\frac{2}{\lambda l}}(-r_0 + \alpha l - x), \\ \eta_1 &= \sqrt{\frac{2}{\lambda l}}(r_0 - \alpha l - x), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$\alpha = 0$ 对应细丝的衍射, 此时

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 &= \gamma^2 = \frac{2}{\lambda l} x^2, \\ \xi_2 &= \sqrt{\frac{2}{\lambda l}}(-r_0 - x), \\ \eta_1 &= \sqrt{\frac{2}{\lambda l}}(r_0 - x), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(9) 式化为

$$\begin{aligned} I_0(x) = & \frac{2A_0^2}{\lambda l} \{ [1 - c(\eta_1) + c(\xi_2)]^2 + [1 - s(\eta_1) + s(\xi_2)]^2 \}, \quad (12) \\ \xi_2 = & -(2/\lambda l)^{1/2}(r_0 + x), \quad \eta_1 = (2/\lambda l)^{1/2}(r_0 - x), \end{aligned}$$

图 2 是用式(12)计算的衍射场强分布, 所用参数为 $\lambda = 0.04 \text{ \AA}$, $l = 1 \text{ m}$, $r_0 = 1 \mu\text{m}$ 。我们看到, 在 $x = 0$ 处有一强度极大值, 它依赖于实验参量, 与圆屏衍射情况相似。

球面波入射的情况

设入射到棱镜平面上的为一点源发出的球面波, 波源到该平面的距离为 d , 当 d 不是很小且我们只关心在棱镜细丝附近区域场分布时, 可以取球面波的二次曲面近似

$$\begin{aligned} U_i(x) = & \frac{A_s}{d} \exp(-ikd) \\ & \times \exp\left(-\frac{ik}{2d} x^2\right), \quad (13) \end{aligned}$$

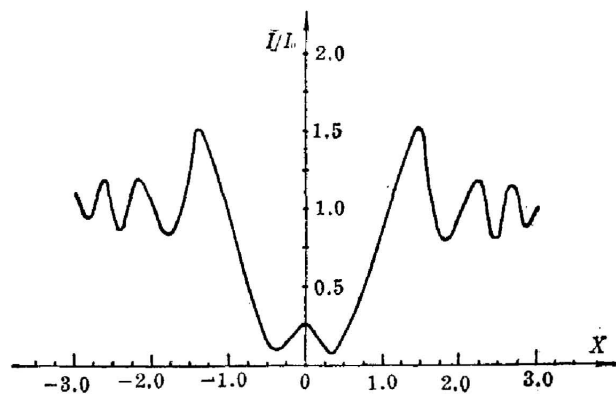


图 2 双棱镜丝的衍射

Fig. 2 Diffraction by biprism wire. Abscissa in unit of $1/\sqrt{\lambda L}$ for plane wave, $(1+1/d)/\sqrt{\lambda L}$ for spherical wave

将(13)代入(14)并作变量代换

$$\left. \begin{aligned} \xi &= Px + q, \\ \eta &= Px + R, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{d} \right); \\ R &= \frac{2}{\lambda P} \left(\alpha + \frac{x}{l} \right)^2; \\ q &= \frac{2}{\lambda P} \left(\frac{x}{l} - \alpha \right)^2, \end{aligned}$$

得到观察平面上的场强分布

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \frac{A_s^2}{\lambda^2 l^2 d^2 P^2} \left\{ [c(\xi_2) + 0.5] \cos \frac{\pi q}{2} + [s(\xi_2) + 0.5] \sin \frac{\pi q}{2} \right. \\ &\quad \left. + [0.5 - c(\eta_1)] \cos \frac{\pi R}{2} + [0.5 - s(\eta_1)] \sin \frac{\pi R}{2} \right\}^2 \\ &\quad + \left\{ [c(\xi_2) + 0.5] \sin \frac{\pi q}{2} - [s(\xi_2) + 0.5] \cos \frac{\pi q}{2} \right. \\ &\quad \left. + [0.5 - c(\eta_1)] \sin \frac{\pi R}{2} - [0.5 - s(\eta_1)] \cos \frac{\pi R}{2} \right\}^2, \end{aligned} \quad (15)$$

对衍射情况

$$I_0(x) = \frac{2A_s^2}{\lambda^2 l^2 d^2 P^2} \{ [1 + c(\xi_2) - c(\eta_1)]^2 + [1 + s(\xi_2) - s(\eta_1)]^2 \}, \quad (16)$$

这里, 在(15)式中

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= -Pr_0 + q, \\ \eta_1 &= Pr_0 + R, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

在(16)式中

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= -Pr_0 + \frac{2}{\lambda P} \cdot \frac{x}{l}, \\ \eta_1 &= Pr_0 + \frac{2}{\lambda P} \cdot \frac{x}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

比较(12)与(16)式, 可以看到, 作为 ξ_2 和 η_1 的函数, 它们的形式完全相同, 但 ξ_2 , η_1 对平面波和球面波具有稍微不同的表达式, 因此条纹结构对 x 的关系也略异。

直边衍射近似

当棱镜的丝较粗时, 我们可以将丝的衍射近似地看作为由两个直边单独作用时产生的衍射所成, 它们分别为直边平行 y 轴, 位于 $x=r_0$ 和 $x=-r_0$ 处的两个半无穷大平面, 即忽略掉通过丝两侧的电子波的相互作用。这只要在(12)或(16)式中分别令 $-r_0 \Rightarrow \infty$ 和 $r_0 \Rightarrow \infty$ 便可得到相应的两个直边的衍射场分布。

由于两个直边完全对称, 我们只讨论处于 $x=r_0$ 处的直边的衍射情况。

对平面波入射, (12)式给出

$$I_0(x) = \frac{4A_0^2}{\lambda^2} \{ [0.5 - c(\eta_1)]^2 + [0.5 - s(\eta_1)]^2 \}. \quad (19)$$

对球面波入射, (16)式给出

$$I_0(x) = \frac{A_s^2}{\lambda l d (l+d)} \times \{ [0.5 - c(\eta_1)]^2 + [0.5 - s(\eta_1)]^2 \}. \quad (20)$$

同样, (19)和(20)式对 η_1 具有相同形式, 但由于 η_1 具有不同形式, 对 x 而言, 极值位置和条纹宽度将不同。

图 3 给出对平面波和球面波入射时直边衍射场分布, 使用参量为 $\lambda = 0.04 \text{ \AA}$, $l = 1 \text{ m}$, $d = 10 \mu\text{m}$ 。

对平面波入射情况, 极值点坐标和条纹宽度比例于 $\sqrt{\lambda l}$ 对球面波, 则比例于 $\sqrt{\lambda l (1+l/d)^{1/2}}$ 。这里要指出的是, 我们对球面波用了近轴近似, 结果只对 d 远大于束直径时成立, 即小角度入射束。

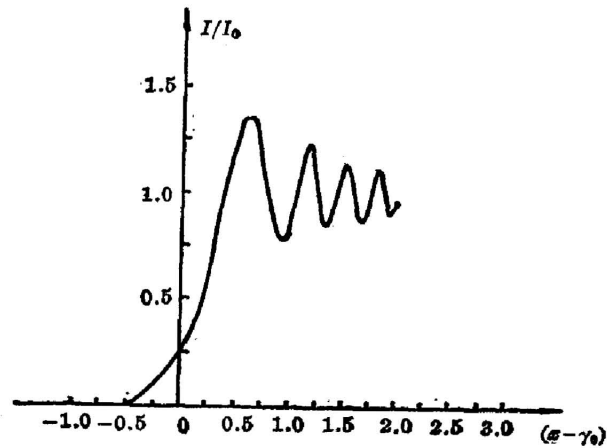


图 3 直边衍射情况

Fig. 3 Diffraction by straight edge
(Unit is the same as in Fig. 2)

参 考 文 献

- [1] Ming Chiang Li; *Advances in Electronics and Electron Physics*, (edited by L. Marton and C. Marton; **53**, 1980), 269.
- [2] G. Möllenstedt and H. Düker; *Z. Physik*, 1956, **145**, No. 3(May), 377.
- [3] M. Vanzi; *Optik*, 1981, **58**, No. 2 (Feb), 103.
- [4] J. W. 顾德门; 《傅里叶光学导论》, (詹达三等译, 科学出版社, 1978), 67.
- [5] *Handbook of Mathematical Function*, (edited by Milton Abramovitz and Irene A. Stegun; Dover Publications, INC. New York, 1972), 295.

Transmission of electron wave through Möllenstedt biprism

FU SHUFEN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 14 September 1984; revised 6 December 1984)

Abstract

By introducing the transmission function of Möllenstedt biprism into Kirchhoff diffraction integral, we have deduced the intensity distribution of an electron wave on the observation plane after passing through the biprism. Analytical expressions of distributions with both plane and spherical incident waves have been obtained. Some numerical results are presented, followed by a discussion on the dependence of the distribution on experimental parameters.