

三光束干涉仪理论

吴 震
(华中工学院光学系)

提 要

本文提出了一种与传统的 Zernike 三光束干涉仪理论^[1]不同的新的理论和“干涉”分析方法。文章不但给出了计算三光束光学系统传递函数的公式,同时也计算出三光束光学系统的光学传递函数以及这种系统所能达到的精度。

随着科学技术的不断发展,对零件的检验的精度与速度都提出了更高的要求,同时在标准计量方面也不断地向高精度发展。对于气体折射率的测量,若采用通常的双光束瑞利干涉仪,为了提高测量精度,则必需增加管长。这样势必导致干涉仪尺寸的异常庞大。

为了使测量向“体积小、精度高、自动化”发展,本文提出了新的三光束干涉仪(用于测量气体等物质的折射率)理论,系统地进行了分析,计算了可能达到的精度。

一、基本理论

三光束干涉仪光学系统如图1所示(照明系统与光电探测系统未画出)。物光栅 A 置于准直透镜 B_1 的焦平面上,在准直透镜 B_1 之后放置三个等宽狭缝光阑 c_1 、 c_2 、 c_3 ,它们分别置于三个储气管 T_1 、 T_2 、 T_3 的中间。 c_1 、 c_2 、 c_3 之间的距离完全由物光栅 A 的光栅常数及准直透镜的焦距 f 和使用的波波长所决定,其距离应使得物光栅 A 的零级衍射通过中间管子, ± 1 级分别通过二边的管子;而缝宽将决定拉赫不变量 $H(H = m\lambda\eta)$ 的大小,即与象差有关;同时缝的大小将直接影响透过的光能量,因此应综合考虑象差与光能量的要求来选取 c_1 、 c_2 、 c_3 的缝宽(实际以选取 $1 \times 8 \text{ mm}^2$ 为宜)。

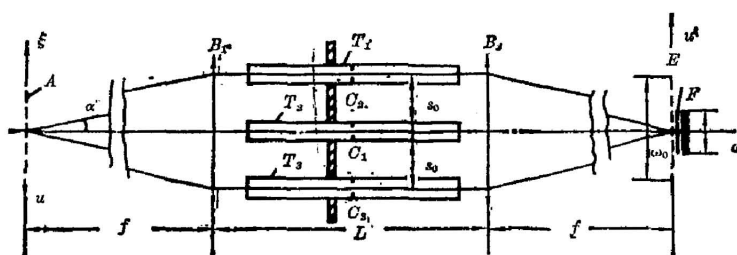


图1 三光束干涉仪光学系统示意图

Fig. 1 Schematic of the optical system of three-beam interferometer

准直后光线经三个狭缝光阑被分成三束光,再经物镜 B_2 后把物光栅 A 成象在物镜的

收稿日期: 1984年2月24日; 收到修改稿日期: 1984年10月5日

焦平面上。最后用光电二极管阵列探测器 F 接收光栅象 E 按空间分布的光强。设在测量前光学系统的传递函数为 D , 当测量时, 由于被测气体(置于中间储气管 T_2 中)的折射率与标准气体不同或因温度、压强等的变化而产生微小的变化, 整个光学系统的光学传递函数也随之发生变化, 使物体象的光强也相应地改变(主要表现在象的对比度的变化), 这样, 只要测得光栅象的强度变化就可以精确地求得被测气体的折射率。

设物光栅 A 上的光强分布为 $B(u)$, 物频谱为 $b(s)$ 。 $b(s)$ 乘上整个光学系统的传递函数 $D(s)$ 即得到物体在象空间的象频谱 $b'(s)$, 由 $b'(s)$ 的傅里叶变换的逆变换得到象的光强分布 $B'(u')$ 。用光电二极管阵列探测器直接探测光栅象的光强的空间分布 $B'(u')$, 最后, 把探测到的信号输入计算机进行图象显示和数据处理, 就得到被测气体的折射率。

二、理论分析^[2,3]

假定“无限长”的物光栅的实际间距(周期)为 d , 则物光栅的光强分布为 $B(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \exp[i(2n\pi/d)\xi]$ 。定义相应的归化坐标为

$$p = (n \sin \alpha / \lambda) d, \quad u = (n \sin \alpha / \lambda) \xi, \quad (1)$$

则 $(\xi/d) = (u/p)$, 今后称 p 为归化的周期, s 为归化的空间频率。因此, 归化以后的物光栅的光强分布 $B(u)$ 为

$$B(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \exp[i(2n\pi/p)u], \quad (2)$$

式中 b_n 为复振幅。对(2)式进行傅里叶变换并用归化后的空间频率 $s_0 = 1/p$ 代入, 则物体在物空间的频谱 $b(s)$ 为

$$b(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \delta(s - ns_0). \quad (3)$$

显然, (3)式乘上光学系统的传递函数 $D(s)$, 就得到物体的象频谱 $b'(s)$ 为

$$b'(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n D(s) \delta(s - ns_0). \quad (4)$$

然后, 对(4)式进行傅里叶逆变换就得到物光栅象的强度分布

$$B'(u') = \sum_{n=-n_0}^{n_0} b_n D(ns_0) \exp[i2\pi(ns_0)u'], \quad (5)$$

式中 n_0 为 $ns_0 \leq 2s_0$ 时最大的整数值。

为了得到象面上的强度分布 $B'(u')$, 有必要先计算该光学系统的传递函数 $D(s)$ 。若在准直光束中放置三个相互平行并与光轴相垂直的狭缝光阑, 其中中间的狭缝光阑的中心和光轴相重合, 狭缝的取向与物光栅的取向一致(见图1), 则对系统进行归化后的光瞳函数 $f(\xi_1, \eta_1)$ 为

$$\left. \begin{aligned} f(\xi_1, \eta_1) &= 0, & (\text{狭缝外}) \\ f(\xi_1, \eta_1) &= 1, & (\text{两旁狭缝内}) \\ f(\xi_1, \eta_1) &= \exp(ikP), & (\text{中间狭缝内}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 P 和 $kP = (2\pi/\lambda)P$ 是由于被测气体(置于中间管子中)与标准气体(置于两旁管子中)的折射率不同所引起的光程差和位相差。

1. 光学传递函数的计算

狭缝排列示意图如图 2 所示。因为物光栅的归化频率 $s_0 = \text{狭缝间距}/\text{光瞳半径}$ ，若把光瞳的半径 r 归化为 1，则狭缝的归化频率 σ_0 与物光栅的归化频率 s_0 相等，即 $\sigma_0 = s_0$ ，这样通过光学系统以后可以获得最佳的光栅象。对于无象差光学系统*的传递函数可直接由光瞳函数的自相关积分求得，即

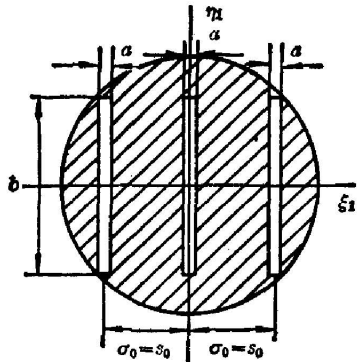


图 2 狭缝光阑排列示意图
Fig. 2 Layout of slits

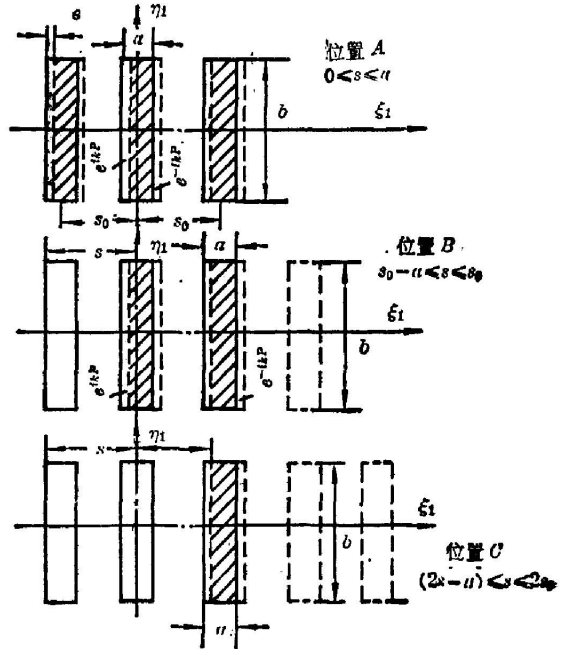


图 3 计算光学传递函数的几个典型光瞳位置
Fig. 3 Several typical aperture positions used for calculating OTF

$$\left. \begin{aligned} D(s) &= \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \eta_1) f^*(\xi_1 - s, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1, \\ A &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \eta_1) f^*(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

图 3 给出了起始光瞳与位移后光瞳的几个不同位置，用(7)式求得这些位置时的光学传递函数如下：

(1) 位置 A:

$$D(s) = \begin{cases} 1 - (s/a), & \\ 0, & \text{当 } a \leq s \leq (s_0 - a) \text{ 时;} \end{cases}$$

(2) 位置 B:

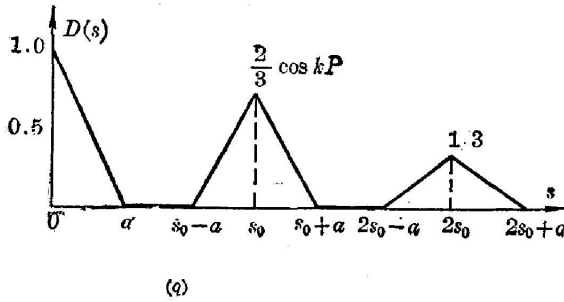
$$D(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{s - s_0}{a} \right) \cos kP, & \\ 0, & \text{当 } (s_0 + a) \leq s \leq (2s_0 - a) \text{ 时;} \end{cases}$$

(3) 位置 C:

$$D(s) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2s_0 - s}{a} \right), & \\ 0, & \text{当 } s > (2s_0 + a) \text{ 时。} \end{cases}$$

* 若采用焦距为 $f \geq 300 \text{ mm}$ ，通光口径为 20 mm 的双胶合物镜，子午面内的波象差 $W_T \leq \lambda/20$ 是容易达到的，对于这种系统可以认为是无象差系统。

显然, 计算得到的光学传递函数与空间频率相对应的理想情况如图 4 所示。



(a)

图 4 理想情况下系统传递函数曲线

Fig. 4 OTF curve under ideal conditions

2. 复振幅 b_n 的计算

对于一个周期为 p , 或者说空间频率为 $s_0 = (1/p)$, 刻痕长度为 M 的“无限长”周期光栅, 根据定义和 (2) 式, 其振幅可由下式给出

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p/2}^{p/2} B(u) \exp\left[i\left(\frac{2n\pi}{p}\right)u\right] du. \quad (8)$$

若把物光栅的光强分布 $B(u)$ 归一化为 1, 则对 (8) 式积分后可得到复振幅

$$b_n = \frac{M}{p} \sin\left(\frac{n\pi M}{p}\right) / \left(\frac{n\pi M}{p}\right). \quad (9)$$

已知光栅常数如周期 p 、刻痕长度 M 等参数后, 把计算得到的光学传递函数及复振幅 b_n 代入 (5) 式就得到了光栅象的强度分布。但是, 物光栅的象 $B'(u')$ 是用光电二极管阵列扫描器来接收的, 因此实际上探测器接收的信号 $F(u')$ 是由折射率的微小不同而引起的象的对比度的变化。对比度定义为

$$C = \frac{F(u')_{\max} - F(u')_{\min}}{F(u')_{\max} + F(u')_{\min}}. \quad (10)$$

这样, 由对比度的变化就可以算出折射率由于气压、温度等引起的变化(对相同折射率的气体)或被测气体折射率相对于标准气体的折射率之差(对不同折射率的气体), 从而可以精确地获得被测气体的折射率。

三、探测信号分析

由于光电二极管阵列的外壳是用平整而光洁度很高的平玻璃窗做保护窗的, 所以探测器本身的透过率 $T(u')$ 可以认为等于 1。这样, 线扫描器所接收的光强分布 $F(u')$ 可认为就是光栅象的空间强度分布 $B'(u')$, 光强的极大与极小值与接收窗的大小 ω 无关。即线扫描器所接收的光强分布

$$F(u') = b_0 D(0) + \sum_{n=1}^{n_0} \{b_n D(ns_0) \exp[i2\pi(ns_0)u'] + b_{-n} D(-ns_0) \exp[i2\pi(ns_0)u']\}, \quad (11)$$

因为振幅恒为正值, 则可以证明 $b_{-n} = b_n^*$ (* 表示复共轭), 同时我们考虑的是无象差系统, 所以 $D(-ns_0) = D^*(ns_0)$ 。令

$$\left. \begin{aligned} b_0 D(0) &= A_0, \\ b_n D(ns_0) &= (1/2) A_n \exp(i\Phi_n), \\ b_{-n} D(-ns_0) &= (1/2) A_n \exp(-i\Phi_n), \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由此, 从方程 (11) 就可以得到在光电二极管阵列扫描器上所接收的光强分布为

$$F(u') = A_0 + \sum_{n=1}^{n_0} A_n \cos[2\pi(ns_0)u' + \Phi_n], \quad (13)$$

式中 $A_n = |2b_n D(ns_0)|$, 把计算得到的 b_0 、 $D(0)$ 、 b_n 、 $D(ns_0)$ 分别代入(13)式, 就可以得到光电探测器所接收到的光强分布的交流分量 A_n 和 A_0 的大小。其值分别为

$$\begin{aligned} A_0 &= M/p, \\ A_1 &= (4/3\pi) \sin(\pi M/p) \cos kP, \\ A_2 &= (1/3\pi) \sin(2\pi M/p). \end{aligned}$$

因为 $n > 2$ 时, $D(ns_0) = 0$, 所以当 $n > 2$ 时, $A_n = 0$ 。因此探测到的象的光强分布除直流分量 A_0 外, 只有一次和二次谐波的交流分量。在信号探测中, 一般说总是应尽量提高输出的信噪比*, 使得到的信号最强。但是, 为了消除对信号处理不利的二次谐波分量, 要求选择适当的 M/p (即适当的信噪比), 而不是最佳 M/p 。通常选用没有二次谐波的 Ronchi 光栅 ($M/p = 1/2$), 则

$$A_2 = (1/3\pi) \sin(2\pi M/p) = 0. \quad (14)$$

于是, 在最后探测的信号中就只存在直流分量与一次谐波分量, 其光强分布为

$$F(u') = (M/p) + (4/3\pi) \sin(\pi M/p) \cos kP \cos(2\pi s_0 u' + \Phi_1). \quad (15)$$

对于这样的信号可以很方便的进行数据处理, 从而精确地求得被测气体的折射率。

四、精度分析

当采用无二次谐波的 Ronchi 光栅时, 线列探测器所接收到的光强分布如图 5 所示的曲线。图中 A_0 为光强分布的直流分量, A_1 为交流分量。其值分别为

$$A_0 = M/p, \quad A_1 = (4/3\pi) \sin(\pi M/p) \cos kP.$$

交直流分量之比即为对比度 C , 其值为

$$C = \frac{A_1}{A_0} = \frac{4 \cos kP \sin(\pi M/p)}{3\pi (M/p)}. \quad (16)$$

如果由折射率的不同或变化引起的光程差 P

可以用 $P = [n \pm (1/4)]\lambda + \Delta P$ (其中 $n = 1, 2, \dots$) 的形式表示, 则在 $\Delta P \ll (\lambda/2\pi)$ 时,

$$\cos kP \doteq \pm (2\pi/\lambda) \Delta P. \quad (17)$$

将(17)式代入(16)式得到

$$C = \frac{A_1}{A_0} = \frac{8\Delta P \sin(\pi M/p)}{3\lambda (M/p)}. \quad (18)$$

假定, 当交直流分量之比 A_1/A_0 变化 1% 时, 光强的变化能够被探测到 (实际上是可能的), 即探测灵敏度为 1/100。把探测灵敏度及光栅常数 $M/p = 1/2$ 代入(18)式, 则得到了三光束干涉仪所能测得的光程差的微小变化为 $\Delta P \approx \lambda/500$ 。所以当管长 $L = 100$ mm 时, 可测得折射率的微小变化 Δn 为 $\Delta n = \Delta P/L \approx 1 \times 10^{-8}$ 。

这就说明对于三光束干涉仪系统, 测量精度 10^{-8} 是容易达到的。即使由电子线路或探测器的缺陷等使探测灵敏度下降一倍时, 我们只需把管子的长度增加至 200 mm, 使精度仍能保持 10^{-8} 。相比之下, 在双光束干涉仪中, 测量气体折射率的瑞利干涉仪管长为 1000 mm,

* 由优化计算得到, 当选择光栅的刻痕宽度与光栅周期 p 之比 (M/p) 等于 0.371 时, 其信噪比为最大。

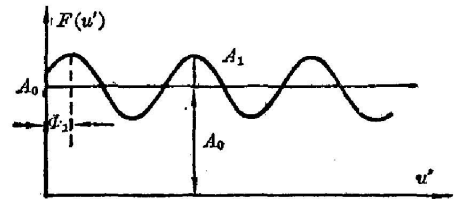


图 5 $F(u')-u'$ 曲线图

Fig. 5 $F(u')$ vs. u' curve.

能测到的光程差变化仅为 $\lambda/50$, 仍差一个数量级。

以上所讨论的是理想的情况, 即光学系统无象差又无调焦误差。但是, 任何系统都不可能是理想的。对于长焦距、小孔径的双胶合镜头, 尚可认为是无象差的系统, 但对于调焦误差, 还是应该考虑的。

假定系统由于调焦误差产生的相位差可用 $\exp[i2\pi W_{20}(\xi_1^2 + \eta_1^2)]$ 表示, 其光瞳函数 $f(\xi_1, \eta_1)$ 分别用 $\exp[i2\pi W_{20}(\xi_1^2 + \eta_1^2)]$ 和 $\exp[i(kP + 2\pi W_{20}(\xi_1^2 + \eta_1^2))]$ 代替。系统的光学传递函数 $D(s)$ 经计算、整理后得(参看图 3)

(1) 位置 A:

$$D(s) = \frac{1}{A} \iint_s f(\xi_1, \eta_1) f^*(\xi_1 - s, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1$$

$$= \frac{(a-s)b}{3ab} \frac{\sin[2\pi W_{20}s(a-s)]}{2\pi W_{20}s(a-s)} [2 \cos(4\pi W_{20}s s_0) + 1],$$

当 $s=0$ 时, $D(0) = 1$ 。

(2) 位置 B:

$$D(s) = \frac{2(a+s_0-s)b}{3ab} \cos(kP - 2\pi W_{20}s s_0) \frac{\sin[2\pi W_{20}s(a+s_0-s)]}{2\pi W_{20}s(a+s_0-s)},$$

当 $s=s_0$ 时, $D(s_0) = \frac{2}{3} \cos(kP - 2\pi W_{20}s_0^2) \frac{\sin(2\pi W_{20}s_0 a)}{2\pi W_{20}s_0 a}$ 。

(3) 位置 C:

$$D(s) = \frac{b(a+2s_0-s)}{3ab} \frac{\sin[2\pi W_{20}s(a+2s_0-s)]}{2\pi W_{20}s(a+2s_0-s)}$$

当 $s=2s_0$ 时, $D(2s_0) = \frac{1}{3} \frac{\sin(4\pi W_{20}s_0 a)}{4\pi W_{20}s_0 a}$ 。

把理想情况下和存在调焦误差情况下计算得到的光学传递函数的结果进行比较可以看出, 后一情况下的传递函数有所下降。只要把有调焦误差时的光学传递函数代入(11)式就可以得到探测器接收到的光强分布 $F(u')$ 。限于篇幅, 就不再予以详细讨论了。

五、结 论

综上所述分析计算可以得出如下结论:

- (1) 整个推导基于非相干传递函数的理论, 故可用准单色光作为仪器的光源;
- (2) 本文所提出的三光束干涉仪用于测量气体等透明物质的折射率是一种较理想的仪器。与瑞利干涉仪相比, 精度高、体积小;
- (3) 由于采用光电探测、微机图形显示和数据处理, 可以大大提高测量速度。

作者衷心地感谢英国里丁大学 H. H. Hopkins 教授对本工作所给予的有益指导与帮助。

参 考 文 献

- [1] F. Zernike; *J. O. S. A.*, 1950, **40**, No. 3 (Mar), 326.

- [2] H.H. Hopkins; *Proc. Phys. Soc. London*, 1962, **79**, No. 511 (Apr), 889.
[3] J. W. Goodman; *«Introduction to Fourier Optics»*, (McGraw-Hill, 1968).

Theory of a three-beam interferometer

WU ZHEN

(*Optical Engineering Department, Huazhong University of Science and Technology*)

(Received 24 February 1984; revised 5 October 1984)

Abstract

This paper describes a new theory and the related analysis method of "interference", which are quite different from the traditional Zernike three-beam interferometer. Formulas are given for calculating the optical transfer function of a three-beam system. Values of the optical transfer function and the accuracy of the system are also calculated.