

便于计算离焦光学系统的 OTF 的较精确算式

何志华 龙夫年
(哈尔滨工业大学)

提 要

本文从基尔霍夫衍射积分公式出发,在弱于菲涅耳条件的近似下,以高斯像面的像差量及系统的离焦量为参变量,导出了便于计算离焦光学系统的 OTF 的普遍算式。利用此算式,只需通过光线追迹得出高斯像面上的像差分布,便可求得对应一系列离焦量的实际像面上的 OTF 值,而不必对每一实际像面进行像差计算。对于研究光学系统在不同离焦状态下的 OTF 的变化规律,本算式是方便的。最后,给出了衍射受限系统处于离焦状态下轴上 OTF 的计算实例。

一、引 言

研究光学系统处于不同离焦状态下的 OTF 分布规律,对于确定最佳像面位置、制定装校公差、研制自动调焦机构均有重要的指导意义。早在五十年代, H. H. 霍普金斯首先给出了衍射受限系统在离焦状态下计算 OTF 的算式(简称传统算式)^[1],该算式是在夫琅和费近似条件下得到的。对于孔径较大、或视场较大、或离焦严重的光学系统,夫琅和费近似条件将遭到破坏,甚至菲涅耳近似条件亦不满足。人们对传统算式的理论精度产生了怀疑,不得不减弱近似条件,以求得较精确的算式。王琦同志分别以菲涅耳近似条件和弱于菲涅耳近似条件导出了计算 OTF 的较精确和更精确的算式^[2,3]。但是,要计算在不同离焦状态下的 OTF 值,必须计算每一相应离焦量的实际像面上的几何像差,这是颇不方便的。

我们将高斯像面与离焦后的实际像面用显式区分开,以高斯像面上的像差量及系统的离焦量为参变量,在弱于菲涅耳近似条件下,导出了便于计算离焦光学系统的 OTF 的普遍算式。这样,既便于研究光学系统处于不同离焦状态下 OTF 的变化规律,又保持了算式的高精度。

二、算式的推导

考查点光源经光学系统后在出瞳处形成的波前 S 对离焦量 $\delta\alpha$ 的实际像面产生的衍射,如图 1 所示。

根据基尔霍夫衍射积分公式,实际像面上任意点 P 处的复振幅,在略去无关的常量后由下式确定

$$E(P) = \iint_S \frac{1 + \cos \alpha}{r} \exp(ikr) ds, \quad (1)$$

式中, r 是波前 S 上任意点 M 到考查点 P 的距离, α 是 r 与波前 S 上 M 点处法线 \overline{MP}' 之间的夹角, $k=2\pi/\lambda$, 各点的坐标如图 1 所示。

为了把(1)式的曲面积分转化为易于处理的重积分, 除了要把积分变量转化成空间坐标变量外, 还必须将积分曲面转化成它在光瞳面 yz 上的投影 D 。这样, 波前 S 上 M 点处的曲面元 ds 与其投影面元 $dy dz$ 之间有如下关系

$$ds = \frac{dy dz}{\cos \theta}, \quad (2)$$

式中 θ 是 \overline{MP}' 与 x 轴的夹角。另外, 考虑到把任何常量附加到(1)式的指数中, 求得的点扩散函数 $|E(P)|^2$ 不变, 因此可以用 r 的变化部分 W 取代指数中的 r , 于是(1)式可改写为

$$E(P) = \iint_D g(y, z) \exp[ikW(y, z)] dy dz, \quad (3)$$

式中

$$g(y, z) = \frac{1 + \cos \alpha}{r \cos \theta}, \quad (4)$$

显然, r 的变化部分 W 正是波前 S 关于 P 点的波像差, 即

$$W(y, z) = \overline{OP} - r = [(x_0 + \delta x)^2 + (y_0 + \beta)^2 + \gamma^2]^{\frac{1}{2}} - [(x - x_0 - \delta x)^2 + (y - y_0 - \beta)^2 + (z - \gamma)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

式中, β 、 γ 分别是考察点 P 在垂直于 x 轴的截面上沿 y 、 z 方向偏离高斯像点 P_0 的距离。由于波面 S 一般只能对 P_0 点附近很小范围产生可察觉到的作用, 因此 β 、 γ 都是很小的量。变量 x 由波面 S 的形状而定。在图 1 中, 若令 τ 代表 R 关于主光线 R_0 的光程差, 即 $\tau = R_0 - R$, 则

$$R = R_0 - \tau = [(x - x_0)^2 + (y - y_0 - \beta')^2 + (z - \gamma')^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

由上式可得

$$x(y, z) = x_0 - [(R_0 - \tau)^2 - (y - y_0 - \beta')^2 - (z - \gamma')^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (6')$$

式中, β' 、 γ' 分别是波前 S 上 M 点对应的几何像差的子午分量和弧矢分量。通过光路追迹可求得 τ 、 β' 和 γ' , 于是 x 就仅仅是 y 和 z 的函数。为了方便, 引入一个新的变量 w , 令

$$w = (\overline{MP}_0^2 - R_0^2) / 2R_0 = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 - R_0^2}{2R_0}, \quad (7)$$

式中 x 由(6)'式确定。显然 w 反映了波前 S 在 M 点处的变形, 亦即反映了光学系统的残余像差。以(7)式取代(5)式中的相应部分, 并且注意到 $R_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, 可以得到

$$W(y, z) = R_0 \left[1 + \frac{2(y_0\beta + x_0\delta x) + \Delta^2}{R_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} - R_0 \left\{ 1 + \frac{2R_0w - 2[(y - y_0)\beta + z\gamma + (x - x_0)\delta x] + \Delta^2}{R_0^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

式中 $\Delta = \beta^2 + \gamma^2 + \delta x^2$ 仍然是一个很小的量。将上式按台劳公式展开, 考察展开后的前三

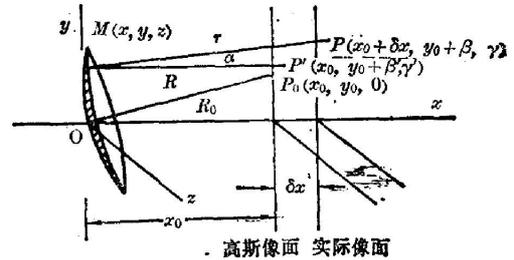


图 1 波前 S 在像面上产生的衍射

Fig. 1 Diffraction produced by wavefront S on the image plane

项,在略去

$$\frac{(y\beta+z\gamma+x\delta x)^2 - (y\beta+z\gamma+x\delta x)(2y_0\beta+\Delta^2) + R_0w\Delta^2}{2R_0^2} \quad (9)$$

后得到

$$W(y, z) = W_0 + W_1 + W_2 + W_3, \quad (10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= \frac{y\beta+z\gamma}{R_0}, \\ W_1 &= \left[\frac{w}{2R_0} - 1 - \frac{(y-y_0)\beta+z\gamma}{R_0^2} \right] w, \\ W_2 &= \left[x-x_0 \frac{y\beta+z\gamma+x\delta x}{R_0^2} \right] \frac{\delta x}{R_0}, \\ W_3 &= \frac{(x_0-x)w\delta x}{R_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

下面考查(3)式积分核中的非指数部分 $g(y, z)$, 根据矢量标积的定义

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{r \cdot R},$$

参照图 1 可得

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{R} = (y-y_0-\beta)(y-y_0-\beta') + (z-\gamma)(z-\gamma') + (x-x_0-\delta x)(x-x_0),$$

并且 $\cos \theta = \frac{x_0-x}{R}$ 。将以上关系代入(4)式得

$$g(y, z) \doteq \frac{1 + \frac{(y-y_0)(\beta-\beta') + z(\gamma-\gamma') + (x-x_0)\delta x}{R_0^2}}{x_0-x}, \quad (12)$$

式中略去了所有含 β/R_0 , γ/R_0 , β'/R_0 , γ'/R_0 , $\delta x/R_0$ 的二次及二次以上的项以及无关的常数因子。

现在, 将(10)式、(12)式代入(3)式, 求得离焦后的实际像面上任意点 P 处的复振幅为

$$\begin{aligned} E(\beta, \gamma) &= \iint_D g(y, z) \exp[ik(W_1+W_2+W_3)] \\ &\quad \times \exp\left[ik\left(y\frac{\beta}{R_0} + z\frac{\gamma}{R_0}\right)\right] dy dz, \end{aligned} \quad (13)$$

或者用傅里叶变换的形式表示成

$$E(\lambda R_0 \tilde{\beta}, \lambda R_0 \tilde{\gamma}) = \iint_{-\infty}^{\infty} g'(y, z) \exp[i2\pi(y\tilde{\beta} + z\tilde{\gamma})] dy dz, \quad (13)'$$

式中

$$g'(y, z) = \begin{cases} g(y, z) \exp[ik(W_1+W_2+W_3)] & (y, z) \in D \\ 0 & (y, z) \notin D \end{cases} \quad (14)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\lambda R_0}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\lambda R_0}. \quad (15)$$

最后, 如果假定光学系统是等晕的, 并且物像的子午放大率和弧矢放大率不变, 则光学系统的 OTF 就是

$$D\left(\frac{u}{\lambda R_0}, \frac{v}{\lambda R_0}\right) = \frac{1}{A'} \iint_{-\infty}^{\infty} |E(\lambda R_0 \tilde{\beta}, \lambda R_0 \tilde{\gamma})|^2 \exp[-i2\pi(u\tilde{\beta} + v\tilde{\gamma})] d\tilde{\beta} d\tilde{\gamma}, \quad (16)$$

式中 u 、 v 分别是子午方向和弧矢方向的空间频率, A' 是归一化常数, 由下式给出

$$A' = \iint_{-\infty}^{\infty} |E(\lambda R_0 \tilde{\beta}, \lambda R_0 \tilde{\gamma})|^2 d\tilde{\beta} d\tilde{\gamma}, \quad (17)$$

(16)式就是便于计算离焦状态下光学系统的 OTF 的普遍算式。式中的点扩散函数由(13)或(13)'式确定。

三、讨 论

本算式是考虑到光学系统既存在残余像差, 又处于离焦状态下的普遍算式。将高斯像面与离焦后的实际像面用显式区分开, 以高斯像面上的像差量和实际像面的离焦量为参变量是本算式的特点。它的优点是:

1. 有较高的理论精度, 适用范围宽

在公式推导中, (10)式是在略去(9)式的情况下得到的。这意味着本算式满足条件

$$R_0^3 \gg \frac{\pi}{\lambda} (x\delta x + y\beta + z\gamma)_{\max}^2,$$

此条件不但远弱于夫琅和费条件, 而且还弱于菲涅耳条件(参看文献[3])。显然, 在较弱条件下导出的算式应该还是比较准确的。

此外, 本算式不仅考虑了波前对像面的倾斜, 同时还考虑了波前沿不同方向传播时振幅的衰减, 并且两者是在综合考虑后进行简化处理的。这种处理方式, 其结果应优于各个量先取近似, 尔后综合的结果。

由此导出的算式, 对于大口径、大视场或离焦严重的光学系统应有较高的理论精度。

2. 变量分离, 物理意义清晰, 使用方便

在(11)式中, W_1 是由高斯像面上的像差量(用 w 表征)引起的; W_2 是由离焦量 δx 引起的; W_3 是两者同时存在而衍生的。于是, 任何实际光学系统的波像差(用广义光瞳函数的指数部分 $W_1 + W_2 + W_3$ 表征)可分为两种基本像差 w 及 δx 。这种分法物理概念清晰, 使用方便。

(1) 便于计算光学系统在一系列离焦状态下的 OTF 值, 避免了对每一实际像面进行像差计算。它的优点是:

(2) 便于寻找最佳像面。对于有像差的实际系统, 可以用离焦来补偿像差的有害作用, 当 $W_1 + W_2 + W_3 = 0$ 时, 系统的传递函数相当于无像差、未离焦的完善系统的传递函数。此时, 所对应的离焦量是最佳离焦量, 所对应的像面是最佳像面。

(3) 易于从普遍公式转化成任一特殊情况。例如: 无像差系统, $W_1 = 0$, $W_3 = 0$; 未离焦系统, $W_2 = 0$, $W_3 = 0$; 或无像差、未离焦的完善系统, $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, $W_3 = 0$ 。

四、计算实例

作为本文算式的一个应用,我们计算离焦的衍射受限系统^①的轴上 OTF 值,并将结果与传统算式的计算结果进行比较。

对于离焦的衍射受限的光学系统,其高斯像面上的像差量 β' 、 γ' 、 τ 及 W 为零,由此产生的波像差 W_1 、 W_2 亦为零。特别是如果仅限于考虑轴上的情况,如图 2 所示,只须进一步令 y_0 、 β 、 γ 等于零,且 $x_0 = R_0$,注意到(6)式,在略去常数因子后,光瞳函数(14)式简化为

$$g'(y, z) = \begin{cases} \left[(x_0^2 - y^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\delta x}{x_0^2} \right] \exp \left[ik (x_0^2 - y^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\delta x}{x_0} \right) \frac{\delta x}{x_0} \right] & (y, z) \in D \\ 0 & (y, z) \notin D, \end{cases} \quad (18)$$

相应的 OTF 由此光瞳的自相关积分确定。考虑到对称性,在进行自相关积分时,光瞳可沿任意方向移动。

为简便起见,令移动方向为 y 方向,如图 3 所示。

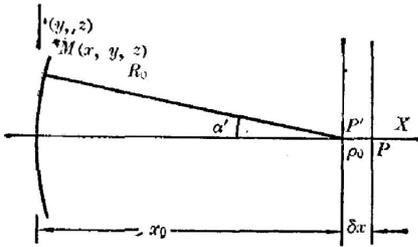


图 2 波前 S 在轴上 P 点产生的衍射
Fig. 2 Diffraction produced by wavefront S at point P

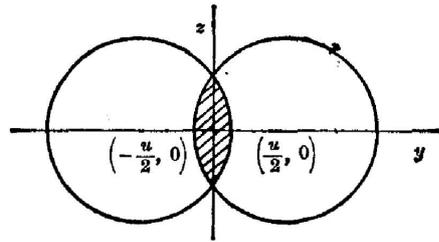


图 3 自相关积分区域
Fig. 3 Region of autocorrelation in integration.

取归化频率,并将出瞳规化为单位半径的圆,则自相关积分可表示为

$$\begin{aligned} D(u) = & \frac{1}{A'} \iint_D \left\{ \left[1 - \sin^2 \alpha' \left(y + \frac{u}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \sin \alpha' \delta x \right\} \\ & \times \left\{ \left[1 - \sin^2 \alpha' \left(y - \frac{u}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \sin \alpha' \delta x \right\} \\ & \times \exp \left[ik \left\{ \left[1 - \sin^2 \alpha' \left(y + \frac{u}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 - \sin^2 \alpha' \left(y - \frac{u}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right. \\ & \left. \times (1 - \sin \alpha' \delta x) \delta x \right] dy dz, \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $\sin \alpha' = 1/R_0 = 1/x_0$; α' 为像方孔径角; D 是光瞳错开后的重迭区域,如图 3 中阴影部分; A' 仍是归一化常数。

^① 关于计算有像差的离焦系统,我们将另文介绍。

如果采取更强的限制条件,即夫琅和费衍射条件,(19)式将退化成霍普金斯给出的计算轴上 OTF 的算式(文献[1]中的(19)式)。

$$D(u) = \frac{1}{\pi} \iint_D \exp(iay) dy dz, \quad (20)$$

式中

$$a = 2\pi u \sin^2 \alpha' \delta x / \lambda_0. \quad (21)$$

为了进行计算,还须对(19)式进行处理。根据欧拉公式把(19)式中的积分核分解为实部与虚部的和。由于虚部是 y 的奇函数,积分域是对称的,其积分结果为零。剩余的实部先对 z 积分,而后作简单地变量替换即可得到

$$\begin{aligned} D(u) = & \frac{1}{A'} \int_u^1 (1-y^2)^{\frac{1}{2}} [(1-\sin^2 \alpha' y^2)^{-\frac{1}{2}} - \sin \alpha' \delta x] \\ & \times \{ [1 - \sin^2 \alpha' (y-2u)^2]^{-\frac{1}{2}} - \sin^2 \alpha' \delta x \} \\ & \times \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \{ [1 - \sin^2 \alpha' y^2]^{\frac{1}{2}} - [1 - \sin^2 \alpha' (y-2u)^2]^{\frac{1}{2}} \} (1 - \sin \alpha' \delta x) \delta x \right] dy, \quad (22) \end{aligned}$$

式中,归一化常数由下式给出

$$A' = \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{1}{2}} [(1-\sin^2 \alpha' y^2)^{-\frac{1}{2}} - \sin \alpha' \delta x]^2 dy, \quad (23)$$

(22)式就是衍射受限的光学系统处于离焦状态下计算轴上 OTF 的算式。利用辛普生公式可以方便地对式(22)进行数值计算。

表 1 列出了 $\sin \alpha' = 1/4$ 的部分计算结果。为了便于比较,我们从 Leo、Levi 等人根据霍普金斯算式得到的计算结果^[4]中选出相应的数据列于表 2。两者的计算误差均小于 3×10^{-7} 。因此,表中所列的数据是可靠的。

两表对应数据的差值,是由于两种算式所取的近似条件不同、进而理论精度不同所引起

表 1

$\delta x \backslash u$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.000	0.870621	0.744452	0.622135	0.504427	0.392414	0.287397
0.002	0.861715	0.720973	0.589068	0.470002	0.363657	0.268060
0.004	0.835405	0.653634	0.497134	0.376421	0.286109	0.215468
0.006	0.792824	0.551059	0.365923	0.249134	0.182437	0.143859
0.008	0.735758	0.425960	0.221993	0.120495	0.080779	0.071343
0.010	0.666544	0.293124	0.091965	0.019121	0.004828	0.013963
0.012	0.587955	0.167159	-0.003956	-0.038613	-0.033594	0.019060
0.014	0.503052	0.060391	-0.056223	-0.052023	-0.036763	-0.027266
0.016	0.415034	-0.018760	-0.066919	-0.033743	-0.017736	-0.017638
0.018	0.327084	-0.066655	-0.047472	-0.002977	0.006529	-0.000871
0.020	0.242213	-0.084471	-0.014093	0.022436	0.022384	0.013079

表 2

$\delta x \backslash u$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.000	0.872889	0.747060	0.623838	0.504632	0.391002	0.284757
0.002	0.864296	0.724235	0.591570	0.471058	0.363082	0.266137
0.004	0.838860	0.658379	0.505580	0.379422	0.287468	0.215287
0.006	0.797585	0.558111	0.372313	0.253900	0.185626	0.145538
0.008	0.742089	0.434819	0.229264	0.125691	0.084609	0.074111
0.010	0.674527	0.302845	0.098397	0.022985	0.007730	0.016598
0.012	0.597480	0.176398	-0.000009	-0.037344	-0.032705	-0.017615
0.014	0.513836	0.067742	-0.055656	-0.053482	-0.037947	-0.027422
0.016	0.426646	-0.014414	-0.069515	-0.036887	-0.020072	-0.019038
0.018	0.338984	-0.065864	-0.051993	-0.006162	0.004388	-0.002645
0.020	0.253804	-0.087092	-0.018769	0.020662	0.021488	0.011839

的。表中对应数据在未离焦(表中 $\delta x=0$ 的一行)时, 最大差值为 0.003; 在离焦较严重(例如 $\delta x=0.018$)时, 最大差值增加到 0.012; 这是由于离焦较严重破坏了夫琅和费近似条件, 传统算式的理论精度下降所致。

参 考 文 献

- [1] H. H. Hopkins; *Pro. Roy. Soc (London) Ser, A*, 231, 91 (1955).
 [2] 王琦;《光学学报》, 1982, 2, No. 1 (Jan), 28.
 [3] 王琦;《光学学报》, 1982, 2, No. 4 (Jul), 301.
 [4] Leo Levi, Richard H. Austing; *Applied Optics*, 1968, No. 5 (May), 967.

A convenient formula for computing the OTF of a defocused optical system

HE ZHIHUA AND LONG FUNIAN
(Harbin Polytechnic Institute)

(Received 6 July 1984; revised 25 October 1984)

Abstract

A general formula for computing the OTF of a defocused optical system is derived from the Kirchoff diffraction integration under an approximate condition which is weaker than the Fresnel condition. Abberations on Gaussian imaging plane and system defocussing are the parameters. The OTF's for a series of differently defocused imaging planes could be obtained by using this formula, avoiding a lot of aberration computing work for each actual imaging plane. Therefore this formula is very convenient for

investigating the regularity of OTF of a defocused optical system. In this paper a computational example is given.

第二届全国固体光学性质学术会议 和第二届全国红外物理学术讨论会 在厦门市联合举行

第二届全国固体光学性质学术会议和第二届全国红外物理学术讨论会由中国物理学会、中国光学学会和上海市红外与遥感学会主办,于1984年12月4~9日在厦门市同时举行。参加会议的有来自全国59个单位(包括29个高校和31个研究所)的代表共161人。大会分别由中山大学林贻坤教授和山东大学陈继述教授主持,中国科学院上海技术物理研究所所长汤定元研究员和中国科学院半导体研究所物理部主任许振嘉副研究员分别致开幕词和闭幕词。

会议录用了应征论文136篇,内容涉及固体光学性质理论、半导体光学性质、非晶态光学性质、激光晶体和其它材料光学性质、实验技术和方法、红外辐射源以及辐射传输和测量、红外探测器及其材料等。全部论文的摘要由《红外研究》杂志(1984, No. 4)在会前汇编出版了专辑。

会议安排了大会报告和按专题分五个分会场进行论文宣读,汤定元研究员在全体会议上介绍了出席第三届国际红外物理会议(瑞士)和第九届国际红外与毫米波会议(日本)的情况以及他本人分别在这二次会议上所作的特邀学术报告。

综观6天的学术交流,与前届会议相比较(第一届全国红外物理学术讨论会于1980年在苏州市举行,第一届全国固体光学性质学术会议于1982年在南京市举行),代表们认为近年来我国在这两个学科领域又取得了明显的进展:

1. 实验室建设有很大进步,具备了一定的实验条件和物质基础;
2. 研究工作的面更广、更深,特别在固体振动谱、晶体中杂质、三元系晶体以及长波红外探测器的研究方面取得了较大进展;
3. 结合实际的基础理论工作已逐步开展,并取得了可喜成果。
4. 在本届会议的代表中,除有经验丰富的老一辈科学家外,还涌现了为数众多的朝气蓬勃正在攀登科学高峰的年青一代,其中硕士、博士研究生就有28名,充分表明我国有希望在不远的将来逐步赶上和超过国际先进水平。

会议经协商决定,第三届全国固体光学性质学术会议将于1986年召开,委托中国科学院长春物理研究所和南开大学筹备;第三届全国红外物理学术讨论会于1988年举行。

(俞福堂)