

# 光学系统中的光栅衍射自成像现象: 广义的 Talbot 效应

廖江红 顾去吾

(中国科学院长春光学精密机械研究所)

## 提 要

本文基于菲涅耳-克希霍夫(Fresnel-Kirchhoff)积分推导了在菲涅耳(Fresnel)近似下,光栅在光学系统中的衍射自成像现象:广义的 Talbot 效应。并把几何成像归结为 Talbot 成像的一个特殊情况。依据广义 Talbot 公式,讨论了在平行光、球面波照明时,光栅的衍射自成像特点。最后,用干涉观点解释了光学系统中的衍射自成像现象。

## 一、引 言

近几十年来,不少学者对 Talbot 效应<sup>[1]</sup>进行了许多有益的研究。Cowley 和 Moodie<sup>[2]</sup>、Stephen 和 Merrill 描述了在点光源照明下,在光栅后面形成的光栅的像的特点。他们认为,在 Talbot 距离处, Talbot 像等价于点光源照明时光栅的几何投影。Winthrop 和 Worthington<sup>[3]</sup>基于菲涅耳-克希霍夫积分,分析了在球面波入射时,平面周期性结构物体在菲涅耳区域的自成像效应,并讨论了在 Talbot 像之间的菲涅耳像。Lohmann<sup>[4]</sup>依据角谱传播理论<sup>[5]</sup>,获得了同瑞利一样的 Talbot 公式<sup>[6]</sup>。Yokozeiki 和 Suzuki<sup>[8,9]</sup>、严瑛白等<sup>[10]</sup>从剪切干涉观点出发,研究了 Talbot 效应。当一束平行光或会聚、发散球面波照明光栅时,自光栅衍射出 0 级、 $\pm 1$  级衍射光。在这三级衍射光重叠区域内形成空间的干涉场分布,在该区域内某一位置处,干涉条纹对比度最好,则认为该位置就是 Talbot 自成像位置,此干涉条纹就是光栅的像。依据这个解释,推导出同瑞利、Cowley 相同的公式。更有甚者, Montgomery<sup>[11]</sup>、Lohmann<sup>[6]</sup>从更一般的波动方程出发,研究了空间场分布沿某方向是周期性变化时,物体的频谱应满足什么条件。

我们基于菲涅耳-克希霍夫积分,推导了光栅在光学系统中的 Talbot 成像公式。依据该公式,证明了几何成像是 Talbot 成像的一个特殊情况。这样,就把几何成像、Talbot 成像统一在一个理论框架之中。

## 二、理 论

图 1 是光栅在光学系统中衍射自成像的示意图。单色点光源照明光栅,经光栅出射的衍射光由透镜会聚后,在透镜的菲涅耳衍射区域内会出现一系列放大和缩小的像,称之为光

栅的傅里叶像。这些像的大小不仅与光栅常数、像所处的位置和透镜的焦距有关；而且和点光源、物平面、透镜的相互位置有关。值得指出的是，并不是在非涅耳衍射区的任何和光轴垂直的平面上都存在光栅的像，而是和用平行光照明光栅所产生的自成像一样，这些光栅的像是分立的。但是，它们和用平行光照明时产生的 Talbot 像又有些不同，像之间一般是不等间隔的。下面详细证明上述结论(本文采用 Vander Lugt 的表述方法<sup>[13]</sup>)。

为方便起见，下面仅考虑单薄透镜组成的光学系统，其方法和结果不难推广到更一般的光学系统中。

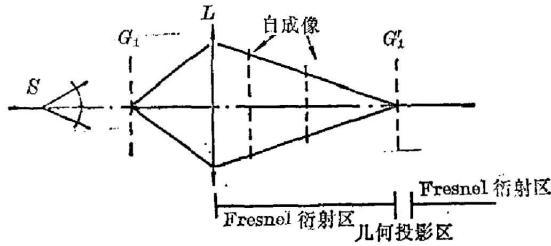


图 1 光学系统中光栅衍射自成像示意图

Fig. 1 Diagram of the diffraction self-imaging of the grating in the optical system

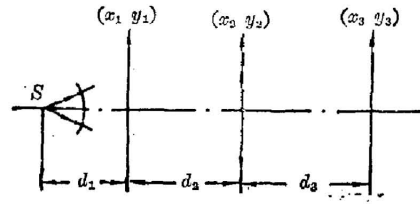


图 2 单薄透镜的光路示意图

Fig. 2 Optical schematic diagram of the single thin lens

图 2 是单薄透镜系统的光路示意图。单色点光源发出球面波照明物体，可以将透镜视为一个位相变换器，其振幅透过率<sup>[7]</sup>：

$$g(x_2, y_2) \propto \exp[-i(k/2f)(x_2^2 + y_2^2)],$$

式中  $f$  为透镜的焦距， $k$  为波数，且  $k = (2\pi/\lambda)$ 。若定义  $\psi(x, y; P) = \exp[i(\pi P/\lambda)(x^2 + y^2)]$  为球面波近似表达式，式中  $P$  为与屏到球心的距离有关的物理量。

在忽略常数项因子时，透过率函数  $g(x_2, y_2)$  为：

$$g(x_2, y_2) = \psi(x_2, y_2; -F), \quad (1)$$

式中  $F = (1/f)$ 。同样，在物平面上，其复振幅分布可以写为

$$U_p(x_1, y_1) \propto \exp[i(\pi/\lambda d_1)(x_1^2 + y_1^2)] \quad \text{或} \quad U_p(x_1, y_1) = \psi(x_1, y_1; D_1), \quad (2)$$

式中  $D_1 = (1/d_1)$ 。在物平面上透过物体的光场分布为

$$U_s(x_1, y_1) = t(x_1, y_1)U_p(x_1, y_1). \quad (3)$$

由菲涅耳-克希霍夫积分<sup>[7]</sup>，在平面  $(x_2, y_2 + 0)$  的光场分布

$$U_2(x_2, y_2; D_2 + 0) = \frac{1}{i\lambda d_2} \iint_{\sigma_1} U_s(x_1, y_1) \psi(x_1 - x_2, y_1 - y_2; D_2) dx_1 dy_1, \quad (4)$$

式中  $D_2 = (1/d_2)$ ， $\sigma_1$  表示物平面上的积分区域。经透镜后在  $(x_2, y_2 - 0)$  的光场分布

$$U_2(x_2, y_2; D_2 - 0) = U_2(x_2, y_2; D_2 + 0) \psi(x_2, y_2; -F). \quad (5)$$

同理，在自成像平面  $(x_3, y_3)$  上光场分布

$$U_3(x_3, y_3; D_3) = \frac{1}{i\lambda d} \iint_{\sigma_2} U_2(x_2, y_2; D_2 - 0) \psi(x_2 - x_3, y_2 - y_3; D_3) dx_2 dy_2, \quad (6)$$

其中  $\sigma_2$  表示透镜的通光口径。将(2)~(5)式分别代入(6)式，得

$$\begin{aligned}
 U_3(x_3, y_3; D_3) = & \left(-\frac{D_2 D_3}{\lambda^2}\right) \iint_{\sigma_1} \iint_{\sigma_2} \psi(x_1, y_1; D_1 + D_2) \\
 & \times t(x_1, y_1) \psi(x_2, y_2; D_2 + D_3 - F) \\
 & \times \psi(x_3, y_3; D_3) \exp\{-i(2\pi/\lambda)[x_2(x_1 D_2 + x_3 D_3) \\
 & + y_2(y_1 D_2 + y_3 D_3)]\} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2. \quad (7)
 \end{aligned}$$

为使讨论简便, 对上述作理想化假设: (1) 透镜的通光口径无限大; (2) 物体是 Ronchi 光栅, 其口径无限大。并令

$$A = D_2 + D_3 - F, \quad B = D_1 + D_2 - (D_2^2/A), \quad C = D_3 - [D_3^2(D_1 + D_2)/AB], \quad (8)$$

则(7)式化成为

$$\begin{aligned}
 U_3(x_3, y_3; D_3) \\
 = \left(\frac{D_2 D_3}{AB}\right) \psi(x_3, y_3; C) \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \exp\left[i2\pi\left(\frac{D_2 D_3}{AB}\right)nDx_3\right] \exp(-i\pi n^2 D^2 \lambda/B), \quad (9)
 \end{aligned}$$

当

$$(1/B) = 2md^2/\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

那末(9)式化为

$$U_3(x_3, y_3; D_3) = \left(\frac{D_2 D_3}{AB}\right) \psi(x_3, y_3; C) \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \exp\left[i2\pi\left(\frac{D_2 D_3}{AB}\right)nDx_3\right]. \quad (11)$$

于是自成像平面  $(x_3, y_3)$  上的光强为

$$I_3(x_3, y_3; D_3) = |U_3(x_3, y_3; D_3)|^2 = \left(\frac{D_2 D_3}{AB}\right)^2 \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \exp\left[i2\pi\left(\frac{D_2 D_3}{AB}\right)nDx_3\right] \right|^2. \quad (12)$$

而(12)式是 Ronchi 光栅透过像光强的表达式, 而此时放大率  $M$  为

$$M = \frac{AB}{D_2 D_3}. \quad (13)$$

因此, 可以认为(10)式是广义的 Talbot 公式,  $A$  满足(10)式的距离  $d_3$  称为广义的 Talbot 距离。显然 Talbot 距离  $d_3$  与序数  $m$ 、光栅常数  $d$  和系统的结构参数有关, 可见, 自成像平面不是连续的, 是分立的不等间隔的。

下面来讨论(11)式的物理意义。显然,  $\psi(x_3, y_3; C)$  是发散球面波在平面  $(x_3, y_3)$  上的复振幅分布, 且球心离平面  $(x_3, y_3)$  的距离  $c = \frac{1}{C}$ 。

令  $d_1 + d_2 = l$ ,  $d_3 - c = l'$ , 由(8)式经过简单的运算, 我们得到

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{f}.$$

这表明发散球面波是由点光源的像产生的, 如图 3 所示。点光源发出单色球面波照明光栅。光栅起着分光作用, 产生 0 级、 $\pm 1$  级、 $\pm 2$  级……衍射光。这些衍射光经透镜会聚后, 在点光源共轭的像平面上产生一系列和各级衍射光一一对应的光栅的谱: 0 级、 $\pm 1$  级、 $\pm 2$  级……, 这些谱就是点光源的衍射像。在各级衍射光重叠的区域, 各级衍射光互相干涉, 形成干涉场的空间分布。在满足广义 Talbot 公式的位置处, 各级衍射光互相干涉形成的各种

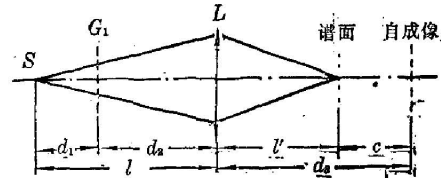


图 3 Talbot 成像的物理解释的示意图

Fig. 3 Diagram of the physical explanation of Talbot imaging

周期的光分布相加仍得一周期的光分布, 结果形成物体的像。在其它位置处不能形成对比度良好的像。

### 三、讨 论

对于广义 Talbot 公式(10), 考虑几个特殊的情况:

#### 1. 几何成像

令  $m=0$ , 由(8)、(10)式和(13)式得

$$A = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{(D_3 - F)(D_1 + D_2) - D_1 D_2}{B} = 0,$$

$$M = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{AB}{D_2 D_3} = -\frac{D_2}{D_3}。所以$$

$$(1/d_2) + (1/d_3) = (1/f), \quad M = -d_3/d_2。 \quad (14)$$

这就是众所周知的几何光学中的高斯成像公式和横向放大率公式。因此, 几何成像可以认为是 Talbot 成像的特殊情况。

#### 2. 无透镜时平行光照明光栅的 Talbot 成像

令  $d_2=0$ ,  $d_1=f$ , 由(8)、(10)式和(13)式得

$$B = \lim_{D_3 \rightarrow \infty} [D_1 + D_2 - (D_2^2/A)] = D_3, \quad M = \lim_{D_3 \rightarrow \infty} \frac{AB}{D_2 D_3} = 1。$$

$$所以 \quad \left. \begin{aligned} d_3 &= 2md^2/\lambda, \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ M &= 1。 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

恰为 Rayleigh<sup>[2]</sup> 推导的 Talbot 公式, 光路如图 4 所示。

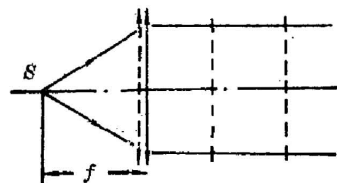


图 4 无透镜时平行光照明光栅的 Talbot 像示意图

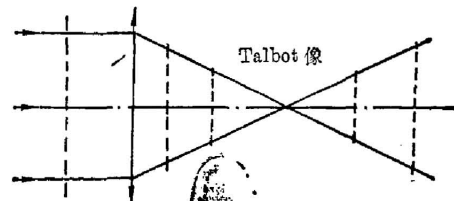


图 5 有透镜时平行光照明光栅的 Talbot 像的示意图

Fig. 4 Diagram of Talbot imaging of the grating illuminated by parallel light without lens

Fig. 5 Diagram of Talbot imaging of the grating illuminated by parallel light with lens

#### 3. 有透镜时平行光照明光栅的 Talbot 像

令  $d_1 = \infty$ , 由(8)、(10)和(13)式得

$$B = \lim_{D_1 \rightarrow 0} \left( D_1 + D_2 - \frac{D_2^2}{A} \right) = \frac{(D_3 - F)D_2}{D_2 + D_3 - F},$$

$$M = \lim_{D_1 \rightarrow 0} \frac{AB}{D_2 D_3} = 1 - \frac{F}{D_3}。$$

所以

$$\left. \begin{aligned} d_2 + \frac{fd_3}{f-d_3} &= \frac{2md^2}{\lambda}, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ M &= 1 - (d_3/f)。 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

光路如图 5 所示。显然 Talbot 像之间是不等间隔的。

#### 4. 球面波照明光栅

令  $F=0$ ,  $d_2+d_3=p$ , 由 (8)、(10) 式和 (13) 式得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d_1 p}{d_1 + p} &= \frac{2m d^2}{\lambda}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \\ M &= 1 + (p/d_1). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(17) 式表明, Talbot 像等价于光栅的几何投影。(17) 式同文献 [4, 10] 中的公式是一致的。

上面我们讨论了平行光、发散球面波照明光栅时的 Talbot 像。同样的讨论也适合于会聚球面波, 那时只要在上述各式中令  $d_1$  是负值。

#### 参 考 文 献

- [1] H. F. Talbot; *Phil. Mag. & J. Sci. (London)*, 1836, **9**, 401.
- [2] L. Rayleigh; *Phil. Mag.*, 1881, **2**, 196.
- [3] J. M. Cowley, A. F. Moodie; *Proc. Phys. Soc. (London)*, 1957, **70**, 486.
- [4] A. B. Stephenand *et al.*; *Opt. Engng*, 1976, **15**, No. 4 (Jul/Aug), 328.
- [5] J. T. Winthrop, C. R. Worthington; *J. O. S. A.*, 1965, **55**, No. 4 (Apr), 373.
- [6] A. W. Lohmann; *«Optical Information Processing»*, Published by author, 1978.
- [7] J. W. Goodman; *《傅里叶光学导论(中译本)》*, (科学出版社, 1978).
- [8] S. Yokozeki, T. Suzuki; *Appl. Opt.*, 1971, **10**, No. 7 (Jul), 1575.
- [9] K. Palorski, S. Yokozeki *et al.*; *Appl. Opt.*, 1976, **15**, No. 5 (May), 1234.
- [10] 严瑛白, 余官正; *《仪器仪表学报》*, 1982, **3**, No. 2 (May), 149.
- [11] W. D. Montgomery; *J. O. S. A.*, 1968, **58**, No. 8 (Aug), 1112.
- [12] R. J. Collier *et al.*; *《光全息学(中译本)》*, (机械工业出版社, 1983).

### Diffraction self-imaging phenomenon of the grating in the optical system: general Talbot effect

LIAO JIANGHONG AND GU QUWU

(Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 14 August 1984; revised 29 October 1984)

#### Abstract

The diffraction self-imaging phenomenon of the grating in the optical system-general Talbot effect, is studied with aid of the Fresnel-Kirchhoff integral in the Fresnel approximation. The geometrical imaging is considered as a special case of Talbot imaging. According to Talbot formula, the properties of the diffraction self-imaging of the grating illuminated by parallel and spherical wave are discussed respectively. Finally, Talbot effect is explained by the method of the interference.