第5卷 第3期
1985年3月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 5, No. 3
March, 1985

Möllenstedt 静电双棱镜的工作特性

陈 建 文
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文把 Möllenstedt 静电双棱镜中的静电场视为柱形电容器场，考虑了该柱面场对自由电子相移的影响，求取了自由电子在观察平面上的程差和干涉条纹间距，获得了自由电子在静电双棱镜内的偏转角和干涉区域宽度公式。

一、引 言

在电子束干涉和电子束全息技术中，目前普遍采用 Möllenstedt 静电双棱镜[1]作为电子分束器[2,3]。这不但因为它的结构简单，而重要的是在这种静电双棱镜中，自由电子只和场相互作用，而不与任何其它物质发生作用。但自从 1956 年研制成双棱镜以来，人们对它的偏转特性却研究得很少。

在静电场中，自由电子的偏转特性，主要和棱镜中的场分布有关。Möllenstedt 曾把电子双棱镜作为两个平行平板电容器来处理，把双棱镜中的场看作均匀电场，导出了自由电子在双棱镜中的偏转角：$\mathrm{tg}\,\alpha=lv_f/2dv$，式中 l 是双棱镜长度，d 为正负电极间距，v_f 为双棱镜电极上的电压，v 为自由电子加速电压。1981 年，意大利的 Vanzi[4] 给出一个经验公式：$\alpha\approx cv_f/v$，式中 c 是和棱镜结构有关的常数，当 $v=125\,\mathrm{kV}$ 时，Vanzi 给出：$\alpha=1.6\times10^{-6}v_f\,\mathrm{rad}$。显然这些经验公式都不具有普遍意义。

在电子束干涉和电子束全息技术中，偏转角是一个很重要的参量。本文从干涉仪的基础理论出发，采用布喇格衍射公式推导了静电双棱镜偏转角，重叠区公式，并讨论了其它有关问题。

二、结构和工作原理

Möllenstedt 静电双棱镜结构如图 1 所示。图中 F 是表面镀金的石英超细丝，其上加正或负电位，两侧极板 g 接地。当电子穿越这一电场区域时，由于洛仑茨力，电子运动轨迹将发出偏转，在小角度范围内，从 S_0 出发的电子可视为来自虚电子源 S_0' 和 S_0''，因而与光学中的菲涅耳双棱镜相似。当它们在某一平面相交重叠时，由于电子的波动特性，在重叠区域产生干涉条纹，条纹宽度则是偏转角的函数。

收稿日期：1984 年 8 月 24 日；收到修改稿日期：1984 年 9 月 24 日

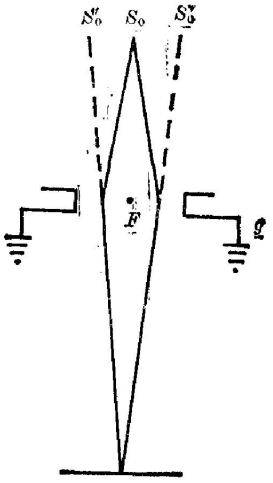

图 1 静电双棱镜工作原理图

Fig. 1 Operation principle for the electrostatic biprism

三、Möllenstedt 静电双棱镜的工作特性

在波动光学里，两相干光束相交重叠时，合成波的振幅和位相是由两波在观察点的波差或光程差决定的。当光程差等于波长的整数倍时，相干相增，而当光程差等于半波长的奇数倍时，则相干相减。我们同样可以把这基本思想引伸到电子光学中。因此，只要我们求出在观察屏某点的程差，就能了解电子相干特性。但在电子干涉仪里，由于 Möllenstedt 静电双棱镜内有一静电场，必须考虑它对电子相位的影响。

采用微扰论的方法，我们把不受外场影响的几何路程记为 r，在外场作用下，引起的路程差记作 Δr，那么总路程则为 $r+\Delta r$。显然 Δr 和外场的分布有关。我们这里把双棱镜的电场近似地看成圆柱形电容器场，其内电极的直径等于双棱镜细丝 F 的直径 2ϕ，而外电极的直径等于两接地电极之间的距离 $2b$，在双棱镜之外的场假定被屏蔽掉，因而等于零。在 O, ξ, η 参考坐标系里，双棱镜周围空间位能分布为[5]

$$U(\xi,\ \eta)=\begin{cases}\dfrac{-|e|v_f\ln[(\xi^2+\eta^2)/b^2]}{\ln(\phi/b)}, & (\phi^2\leqslant\xi^2+\eta^2\leqslant b^2)\\ 0, & (\xi^2+\eta^2>b^2)\end{cases}\tag{1}$$

假定电子束源位于 S_0 点，双棱镜丝 F 位于 H 平面，观察屏置于 Π 平面，如图 2 所示。且 S_0 到 H 平面的距离为 r_0，H 平面到观察屏的距离为 z。

我们考虑电子从 S_0 经 M_1 和 M_2 到达 P_s 点的电子的程差：

$$\delta=[(r_1+\Delta r_1)+(r_3+\Delta r_3)]-[(r_2+\Delta r_2)+(r_4+\Delta r_4)]。\tag{2}$$

在保守力场中电子由 S_0 运动到 Q 点时的轨迹(如图 3 所示)为[6]

$$r=\int_l(p/p_0)dl,$$

式中 p 是电子的广义动量，dl 是电子运动轨迹的微元，且 $p_0=(2mE)^{1/2}$，比值 $p(\boldsymbol{r})/p_0$ 是表示没有磁场时的空间折射率[7]，m 是电子的静止质量，E 为电子能量，当存在静电场时，若

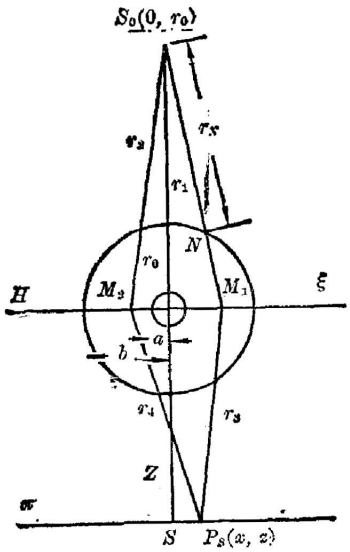

图 2　观察平面 Π 中光程计算图

Fig. 2　Geometry for the calculation of the optical paths in the plane of observation Π

以 $u(\boldsymbol{r})$ 表示静电场的位能，通常 $E \gg u(\boldsymbol{r})$，则

$$\left.\begin{aligned} p(\boldsymbol{r}) &= \{2m[E-u(\boldsymbol{r})]\}^{1/2}, \\ \frac{p(\boldsymbol{r})}{p_0} &= \left[1-\frac{u(\boldsymbol{r})}{E}\right]^{1/2} \doteq 1-\frac{u(\boldsymbol{r})}{2E}。\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

于是，电子的路径和由静电场引起的程差为

$$\left.\begin{aligned} r &= l-\frac{1}{2E}\int_l u(\boldsymbol{r})dl, \\ \Delta r_1 &= -\frac{1}{2E}\int_l u(\boldsymbol{r})dl。\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

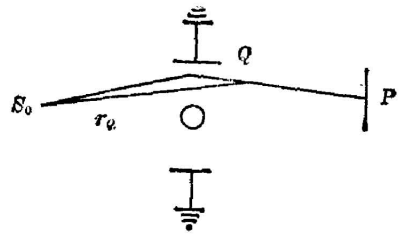

图 3　静电场对自由电子位相的影响

Fig. 3　The phase shifts of free-electron caused by the electrostatic field

从图 3 可以看出，当电子从 S_0 发射以后将沿直线通过零场区域，在双棱镜静电场作用区域内轨道为曲线，离开作用区，电子又以直线运动。从条件 $u(\boldsymbol{r}) \ll E$，可假定 S_0 和 Q 之间的轨道 l 与线段 $\overline{S_0Q}$ 差距不大，因此沿 l 积分可以换成沿 $\overline{S_0Q}$ 积分，即 $l \doteq S_0Q$，所以

$$\int_l u(\boldsymbol{r})dl = r_Q\int_0^1 u(\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{r}_Q\rho)d\rho$$

这里 ρ 是引入的中间参数，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{r}_Q\rho$，因此图 2 中静电场的相位移动为

$$\left.\begin{aligned} \Delta r_1 &= -\frac{r_1}{2E}\int_0^1 u(S_0+r_1\rho)d\rho, \quad & \Delta r_2 &= -\frac{r_2}{2E}\int_0^1 u(S_0+r_2\rho d\rho, \\ \Delta r_3 &= -\frac{r_3}{2E}\int_0^1 u(S_0+r_3\rho)d\rho, \quad & \Delta r_4 &= -\frac{r_4}{2E}\int_0^1 u(S_0+r_4\rho)d\rho。\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

从图 2 可以求得

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= (\xi_1^2+r_0^2)^{1/2}, \quad & r_2 &= (\xi_2^2+r_0^2)^{1/2}, \\ r_3 &= [(x-\xi_1)^2+z^2]^{1/2}, \quad & r_4 &= [(x-\xi_2)^2+z^2]^{1/2}。\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

将以上诸式按幂级数展开并取代到一级项，则有

$$(r_1+r_3)-(r_2+r_4) = \frac{\xi_1-\xi_2}{2}\left[(\xi_1+\xi_2)\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{z}\right)-2\frac{x}{z}\right]。 \tag{7}$$

(5) 式的一个积分可以写成

$$\int_0^1 u(S_0+r_1\rho)d\rho = \int_0^{r_N/r_1} u(S_0+r_1\rho)d\rho + \int_{r_N/r_1}^1 u(S_0+r_1\rho)d\rho,$$

我们知道，当 $\xi^2+\eta^2 \geqslant b^2$ 时，$u(\xi, \eta)=0$，故

$$\int_0^{r_N/r_1} u(S_0+r_1\rho)d\rho = 0,$$

因此

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 u(S_0+r_1\rho)d\rho=\int_{r_N/r_1}^1 u(S_0+r_1\rho)d\rho,\\&r_N=\frac{r_0^2}{r_1}\left[1-\frac{|\xi|}{r_0}\left(\frac{b^2}{r_0^2}+\frac{b^2}{\xi^2}-1\right)^{1/2}\right]。\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

为了计算(8)式积分，必须知道 $\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{r}_1\rho$ 点的坐标，从图2可以看出，他们分别是 $\xi\rho$ 和 $\boldsymbol{r}_0(\rho-1)$，代入方程(1)，求得(8)式的积分核是

$$u(S_0+r_1\rho)=\frac{-|e|v_f}{2\ln(\phi/b)}\ln\left[\frac{r_0^2+\xi^2}{b^2}\rho^2-2\frac{r_0^2}{b^2}\rho+\frac{r_0^2}{b^2}\right]。\tag{9}$$

将(9)式积分核代入(8)式求得

$$\begin{aligned}\Delta r_1=\frac{-r_1|e|v_f}{2\ln(\phi/b)}\Bigg[&\left(\rho-\frac{r_0^2}{r_1^2}\right)\ln\left(\frac{r_1^2}{b^2}\rho^2-\frac{2r_0^2}{b^2}\rho+\frac{r_0^2}{b^2}\right)-2\rho\\&+\frac{b^2}{r_1^2}\left(\frac{2r_0|\xi|}{b^2}\right)\text{arc tg}\,\frac{r_1^2\rho-r_0^2}{r_0|\xi|}\Bigg]\Bigg|_{r_N/r_1}^1。\end{aligned}\tag{10}$$

在通常情况下，电子束在丝 F 附近的照明区域远远小于 b，即 $\xi\ll b$，略去(10)式中 ξ/b 项及高次项，得

$$\Delta r_1=\frac{-|e|v_f}{\ln(\phi/b)}\left[\frac{\pi}{2}|\xi_1|-b\right],\tag{11}$$

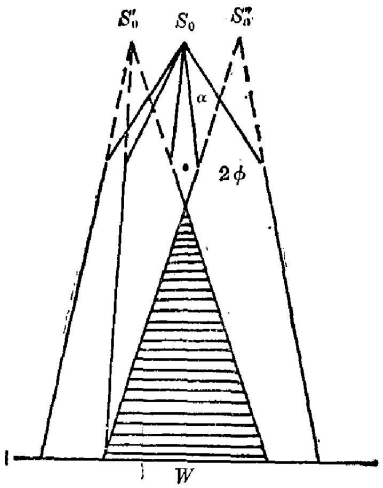

图4 干涉区域宽度计算图

Fig. 4 Geometry for the calculation of the interference region width

同样可以求得

$$\left.\begin{aligned}\Delta r_1&=\frac{-|e|v_f}{\ln(\phi/b)}\left[\frac{\pi}{2}|\xi_2|-b\right],\\\Delta r_3&=\frac{-|e|v_f}{\ln(\phi/b)}\left[\frac{\pi}{2}|\xi_1|-b\right]=\Delta r_1,\\\Delta r_4&=\frac{-|e|v_f}{\ln(\phi/b)}\left[\frac{\pi}{2}|\xi_2|-b\right]=\Delta r_2。\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

将(6)和(12)式代入(2)式中去，考虑到 $\xi_1+\xi_2=[2r_0x/(r_0+z)]$，得

$$\delta=\frac{|e|v_f}{\ln(\phi/b)}\cdot\frac{\pi}{2E}\cdot\frac{2r_0x}{r_0+z},\tag{13}$$

在上述计算中，$|\xi_1|=\xi_1$，$|\xi_2|=-\xi_2$。当 $\delta=n\pi/k_0$ 时，在观察面上得到亮条纹(其中 $k_0=(2mE)^{1/2}/\hbar$)，即

$$x_n=n\frac{r_0+z}{r_0}\frac{\ln(\phi/b)}{|e|v_f}\left(\frac{2E}{m}\right)^{3/2}\hbar,\quad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots)\tag{14}$$

两条纹间距为

$$\Delta=x_{n+1}-x_n=\frac{r_0+z}{r_0}\frac{\ln(\phi/b)}{|e|v_f}\left(\frac{2E}{m}\right)^{3/2}\hbar。\tag{15}$$

从布喇格公式知

$$\Delta=\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{r_0+z}{r_0\alpha}。\tag{16}$$

在不考虑相对论效应时，电子波长为

$$\lambda=h(2m|e|v)^{-1/2},\tag{17}$$

式中 v 是自由电子的加速电压，将(16)、(17)式代入到(15)式中，求得自由电子在双棱镜中的偏转角

$$\alpha=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\ln(\phi/b)}\frac{v_f}{v}。\tag{18}$$

从(18)式可以看出，电子束在 Möllenstedt 电子双棱镜中的偏转角和加在丝 F 上的电压成正比，和电子束的加速电压成反比，当 v_f 和 v 决定以后，还和丝 F 的直径以及双棱镜结构有关。

当我们求得偏转角以后，便可求得相干区域的总宽度 w。从图 4 可以看出

$$[z_0/(w+2\phi)]=[r_0/(d-2\phi)],$$

因此

$$\left.\begin{aligned} w&=\frac{zd-2\phi(r_0+z)}{r_0},\\ d&=2r_0\alpha。\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

考虑(18)式化简(19)式得

$$w=\frac{\pi z}{|\ln(\phi/b)|}\cdot\frac{v_f}{v}-\frac{2\phi}{r_0}(r_0+z)。\tag{20}$$

从(19)式可以看出，欲获得较宽的相干区域可增大双棱镜电极上的电压，或拉长静电双棱镜到观察屏的距离。

四、讨　　论

(1) 首先将我们所求得的偏转角公式(18)式和 Vanzi 经验公式进行比较[4]。Vanzi 给出的数据是：$2\phi=0.25\,\mu\text{m}$，$v=125\,\text{kV}$。但遗憾的是作者没有给出 b 值。但通常 b 值为 $(0.5\sim1)\,\text{mm}$，由(18)式求得 $\alpha=1.52\sim1.3\times10^{-6}v_f\,\text{rad}$。这和 Vanzi 给出的经验数据 $\alpha=1.6\times10^{-6}v_f\,\text{rad}$ 基本一致。产生误差的主要原因是：本文给出的电场分布是一个理想的模型，而实际上电场分布和许多因素都有关。

(2) 由(21)式知道，欲要产生干涉条纹，两波必须相交重叠，要求 $w>0$，即

$$z>2\phi\Big/\left[\frac{\pi}{|\ln(\phi/b)|}\frac{v_f}{v}-\frac{2\phi}{r_0}\right],\tag{22}$$

它表明，电子束经双棱镜偏转以后，必须经一段距离之后才能相交重叠，从上式可以看出，偏转角越大，或静电双棱镜丝越细，则要求 z 距离越短。

(3) 从(21)式还可以看到，当静电双棱镜结构已确定，棱镜位置亦已决定，为了产生一定的重叠区域，双棱镜丝上的电压必须达到一定的值，才能产生干涉

$$v_f>\frac{2\phi}{r_0}(r_0+z)\left[\frac{|\ln(\phi/b)|}{\pi z}\right],\tag{23}$$

从上式可以看出，自由电子的加速电压越高，要求 v_f 越高。

(4) 当电子双棱镜上施加一负电压时，此时偏转角的符号与施加正压时相反，欲要电子束发生重叠，必须在双棱镜后面放置一电子透镜。通常我们把加正电位的电子双棱镜叫作会聚型静电双棱镜，而加负电压的，叫作发散型静电双棱镜。

(5) 本文所讨论的内容仅适合于电子束源为一点源，即没有考虑束源的大小对相干性的影响，并认为电子束的加速电压远大于双棱镜丝上的电压。在电子束干涉实验里，它们相差三个数量级，因此，这种假设是成立的。

参 考 文 献

[1] G. Möllenstedt, V. H. Duker; *Z. Physik*, 1956, **145**, No. 3 (Mar), 377.
[2] Akira Tonomura *et al.*; *J. Electron Microsc.*, 1977, **28**, No. 1 (Jan), 1.
[3] O. Donati *et al.*; *Amer. J. Phys.*, 1973, **41**, No. 5 (May), 639.
[4] M. Vanzi; *Optik*, 1981, **58**, No. 2 (Feb), 103.
[5] 西门纪业;《电子和离子光学原理及象差导论》,(科学出版社, 1983)。
[6] 赵国骏等;《电子光学》,(国防工业出版社, 1980)。
[7] W. Glaser; *«Gründlagen der Elektrononoptik»*, Chapter 32 (Springer, Vienna, 1952).
[8] J. Komrska; *«Advances in Electronics and Electron Physics»*, (Academic Press, Inc., 1970), **139**.

Operation hehaviour for Möllenstedt electrostatic biprism

CHEN JIANWEN
(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 24 August 1984; revised 24 September 1984)

Abstract

Regarding the electrostatic field in Möllenstedt biprism as the field of the cylindrical capacitor and considering the phase shift of free-electron caused by the cylindrical field, the difference of optical path length and the spacings of the interference fringes on the plane for observation were calculated. The angle of deviation for free-electrons in the electrostatic biprism and the width of the interference region formulars were obtained. And the coherent condition was discussed.