

光学双稳性的 Ikeda 不稳定性 与静态稳定度

陈历学 李淳飞 洪晶
(哈尔滨工业大学)

提 要

在延时反馈光学双稳性的动力学方程中引入描述反馈强度的静态稳定度。指出除相对延时 Q 外, 静态稳定度 S 也影响着系统的不稳定行为, 包括不稳定的阈值条件和振荡模式。欲产生不稳定性, 在长延时下要求 $S \geq 2$, 在短延时下要求 $S \geq 1 + \pi/2Q$ 。用混合光学双稳装置演示了振荡、分岔和混沌现象, 从实验上证实了理论分析的正确性。表明 Ikeda 不稳定性和稳定性之间存在着密切联系。本文为实现本征光学双稳性的 Ikeda 不稳定性提供了新的依据。

光学双稳性的动力行为, 特别是具有延时反馈的光学双稳装置的不稳定性近年来引起人们很大的兴趣。Ikeda 首先指出环腔本征光学双稳装置能够产生周期振荡和混沌现象^[1,2], 他给出了描述这种不稳定性的微分——差分方程。Gibbs 等人用混合光学双稳器件首先证实了长延时下的不稳定性, 并用差分方程予以解释^[3]。Okada 等人也用混合器件对延时不稳定性进行了细致的实验研究, 理论上则采用微分——差分方程线性稳定性分析方法^[4]。Gao 和 Narducci 着重研究过短延时的不稳定行为, 并对混沌结构进行了频谱分析^[5,6]。本文定义了一个反映反馈强度的物理量——静态稳定度, 证明它不仅可用来描述光学双稳性的稳定性, 也是 Ikeda 不稳定性描述中的一个重要的量。我们发现似乎矛盾的现象, 静态稳定度越大, Ikeda 不稳定性越强烈, 两类稳定性之间存在着密切联系。

一、稳定性描述

光学双稳装置一般由调制系统和反馈系统两部分组成^[7]。设入射光强和透射光强分别为 I_i 和 I_t , 反馈引起的相移过程中, 在稳态条件下光学双稳性可以用下述方程组描述,

$$I_t = I_i \tau(\phi), \quad \phi = \phi_0 + f(I_t), \quad (1)$$

式中 ϕ_0 为无反馈初始相移, τ 为系统的透射率, 是 ϕ 的函数, 称为调制函数。 f 引起相移变化, 是 I_t 的函数, 称为反馈函数。

为分析光学双稳性的稳定性, 须考虑其动力学行为。如果调制系统的弛豫时间远远小于反馈系统的弛豫时间, 我们可以仅仅考虑反馈系统的弛豫过程。用德拜弛豫方程描述反馈系统的弛豫过程, 光学双稳性的动力学耦合方程可以写作

$$I_t(t) = I_i \tau(\phi), \quad \tau_0(d\phi/dt) + \phi - \phi_0 = f[I_t(t)], \quad (2)$$

式中 τ_0 是反馈系统的驰豫时间。

设想 $\phi(t)$ 相对某稳定值 ϕ_s 有一小扰动 $\Delta\phi(t)$, 将 f 在 ϕ_s 附近展成泰勒级数, 保留到 $\Delta\phi$ 的线性项, 得到 $\Delta\phi$ 满足的微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \tau_0(d\Delta\phi(t)/dt) + \Delta\phi(t) &= -(S-1)\Delta\phi(t), \\ S &= 1 - I_i(df(I_i)/dI_i)(d\tau(\phi)/d\phi). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

上述微分方程的形式解为

$$\Delta\phi(t) = \Delta\phi_0 \exp[-(S/\tau_0)t]. \quad (4)$$

显然, 双稳系统稳定的条件为 $S \geq 0$ 。当 $S > 0$ 时, $\Delta\phi$ 将逐步增加, 以致离开平衡点。因此 S 是一个判断系统是否稳定的物理量。

实际上, S 不仅是系统稳定性的判据, 而且 S 的大小定量地描述着系统的稳定性, S 越大, 在某一初始扰动下回到平衡点的速度越快。而且, S 正是文献[8]中引入的静态稳定度, 定义为输入光强和输出光强相对变化之比^[8]

$$S = \lim_{\Delta I_i \rightarrow 0} \frac{\Delta I_i / I_i}{\Delta I_i / I_i} = \tau / \frac{dI_i}{dI_i}. \quad (5)$$

由(1)式求得 (dI_i/dI_i) , 再由(5)式的定义可求得(3)式中的 S 。

静态稳定度 S 分为三种情况: (i) 稳定区 $S > 1$; (ii) 亚稳区 $0 \leq S \leq 1$; (iii) 非稳区 $S < 0$ 。

从几何图形上看, 静态稳定度似乎仅仅描述了光学双稳回线的平坦程度。不过, 单纯调制系统的 I_i-I_i 图形仅是一条直线, 只有在反馈系统存在的情况下, 这条直线才畸变成为双稳回线。反馈越强, 畸变越严重, I_i-I_i 曲线越平坦, 因而静态稳定度 S 也是一个描述反馈程度的物理量。

由(3)式可以看到, 稳定度 S 取决于 df/dI_i 及 $I_i d\tau/d\phi$ 。 S 正比于 df/dI_i 表明 S 不是取决于反馈信号能够造成多大的总相位差移动, 而是取决于单位反馈信号下能够造成多大的相位差移动。另一项 $I_i d\tau/d\phi$ 表明单位相位差移动下能够造成多大的输出光强改变。十分明显, S 确实描述着系统的反馈强度。

二、Ikeda 不稳定性分析

具有延时反馈的光学双稳性的动力学耦合方程可以写作

$$\left. \begin{aligned} I_i &= I_i \tau(t), \\ \tau_0(d\phi(t)/dt) + \phi(t) - \phi_0 &= f[I_i(t-T)], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 T 为反馈信号的延迟时间。和得到(3)式的方法相类似, 并利用 $\phi_s(t) = \phi_s(t-T)$, 得到相对于某一稳态值 $\phi_s(t)$ 的小微扰 $\Delta\phi(t)$ 满足的微分——差分方程为

$$\tau_0(d\Delta\phi(t)/dt) + \Delta\phi(t) = -(S-1)\Delta\phi(t-T). \quad (7)$$

设其解形式如 $c \exp(\lambda t)$, 则本征值方程为

$$\tau_0 \lambda + 1 + (S-1) \exp(-\lambda T) = 0. \quad (8)$$

设 $\lambda = \alpha + i\beta$, 其中实部 α 将确定方程(6)的解的稳定性, 表示振荡模的强度(或增益), 虚部 β 则确定可能存在的振荡模式, 表示模的圆频率。将(8)式分解为实虚两部分, 再适当改变形式得

$$\left. \begin{aligned} \alpha T &= - [\beta T + \text{ctg}(\beta T) + Q], \\ \frac{\sin(\beta T)}{\beta T} &= \frac{\exp(\alpha T)}{Q(S-1)}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 $Q = T/\tau_0$ 表示相对响应时间的延迟时间, 称为相对延迟时间。已知 Q 和 S 则可由(9)式求得 α 和 β , 从而在线性化允许的范围内确定系统的不稳定行为。

因为 $\beta T \text{ctg}(\beta T)$ 与 $\sin(\beta T)/\beta T$ 皆为 βT 的偶函数, 本征值 λ 的解为一对共轭复根, 故只须讨论 $\beta T > 0$ 的情况即可。此外我们仅考虑 $S > 1$ 的静态稳定情况。由不稳定条件 $\alpha T \geq 0$, (9)式变为

$$\left. \begin{aligned} -\beta T \text{ctg}(\beta T) &\geq Q, \\ \sin(\beta T)/\beta T &\geq 1/Q(S-1), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10)式的解具有多值性。由 $\text{ctg}(\beta T) \leq 0$ 及 $\sin(\beta T) \geq 0$, 对 $\beta T \geq 0$ 情况下其取值范围为

$$[2n + (1/2)]\pi \leq \beta_n T \leq (2n+1)\pi, \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (11)$$

式中 $n=0, 1, 2, \dots$ 对应于 $\beta_0 T, \beta_1 T, \beta_2 T, \dots$, 对应于各种阶次的振荡模。考虑到(10)和(11)式, 则得到 $\alpha T \geq 0$ 的不稳定阈值条件的另一种表达形式

$$S \geq 1 - \frac{1}{\cos \beta T} \geq 2. \quad (12)$$

图1给出 $\beta_0 T, \beta_1 T, \beta_2 T$ 三种低频模式的 $Q-S$ 阈值曲线, 当 Q, S 确定的点处在阈值曲线之右上方时, 满足不稳定阈值条件。由图可见, 对一定的振荡模式(β_n 一定), 长延时(Q 大)不要求很高的静态稳定度, 只需 $S \geq 2$; 短延时(Q 小)却要求较高的静态稳定度。而且振荡模的阶数越大(β_n 越大), 要求 Q 和 S 取值越大。

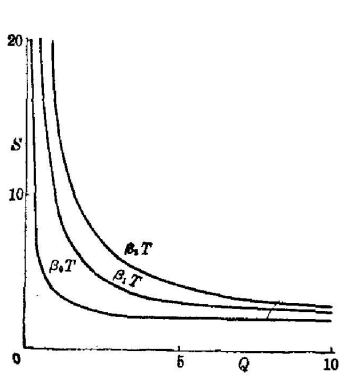


图1 $\beta_0 T, \beta_1 T, \beta_2 T$ 三种
低频模式的 $Q-S$ 曲线
Fig. 1 $Q-S$ curve for three modes
of low frequencies $\beta_0 T, \beta_1 T, \beta_2 T$

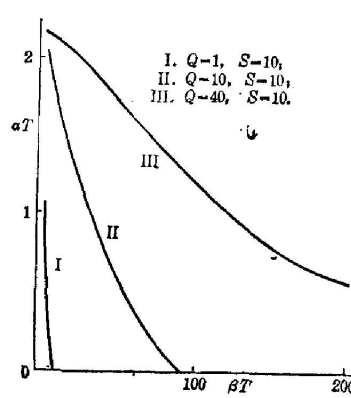


图2 S 一定下不同 Q 时
的 $\alpha T-\beta T$ 曲线
Fig. 2 Influence of Q on
 $\alpha T-\beta T$ relation

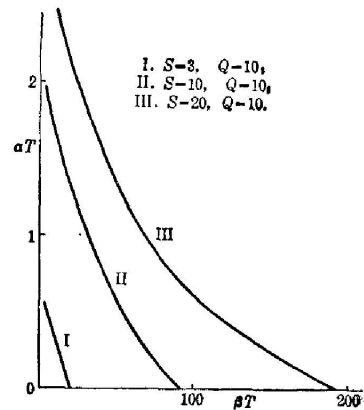


图3 同一 Q 不同 S 下
的 $\alpha T-\beta T$ 曲线
Fig. 3 Influence of S on
 $\alpha T-\beta T$ relation

图2与图3给出了在不同 Q 或不同 S 值下的 $\beta T-\alpha T$ 曲线。由图可见, 在一定的 Q 和 S 下, β 越小 α 越大, 这表明各种振荡模式的竞争中低频模的增益最大, 更易满足不稳定条件而优先输出。

在高阶模情况下 βT 很大, 由(10)式知 $|\text{ctg}(\beta T)|$ 很小, 因此 $\beta T \cong [2n + (1/2)]\pi$,

$\sin(\beta T) \cong 1$, 得到在一定 Q 和 S 值下允许的最高模阶数 n 为

$$n \leq \frac{Q(S-1)}{2\pi} - \frac{1}{4}, \quad (13)$$

可见 Q 和 S 越大, 允许的振荡模式数量越多, 这可从图 2 和图 3 看到。若取 $Q=40$, $S=10$, 由(13)式计算得 $n \leq 57$, 而由(9)式得到的 $\alpha T \geq 0$ 的数值解为 $n=58$, 结果基本一致。

三、极端情况下的不稳定性

下面考查在短延时和长延时两种极端条件下不稳定的阈值条件和振荡周期。

对短延时 $Q \rightarrow 0$, $\beta T \cong [2n + (1/2)]\pi$, $\sin(\beta T) \cong 1$, 则

$$S \geq 1 + \frac{[2n + (1/2)]\pi}{Q}. \quad (14)$$

对一定的 n , Q 越小要求 S 越大。基波模 ($n=0$) 的起振条件是

$$S_0 \geq 1 + (\pi/2Q). \quad (15)$$

取 $Q=0.16$, 则要求 $S \geq 10.8$, 在一般的线性反馈光学取稳器件中, 第一级双稳难以达到 $S > 10$ 的结果, 正如文献[3]报道的 $Q=0.16$ 的实验未出现不稳定性。短延时允许的振荡周期 \bar{T}_n 为

$$\bar{T}_n = \frac{2\pi}{\beta_n} \cong \frac{4T}{4n+1}. \quad (16)$$

对应于 $n=0, 1, 2, \dots$, 振荡周期序列为 $\bar{T}_n = 4T, 4T/5, 4T/9, \dots$, 基模振荡周期为 $4T$ 。

对长延时 $Q \rightarrow \infty$, $\beta T \cong (2n+1)\pi$, $\cos \beta T \cong -1$, 对应的不稳定阈值条件和振荡周期为

$$S \geq 2, \quad \bar{T}_n \cong \frac{2T}{2n+1}. \quad (17)$$

与 $n=0, 1, 2, \dots$, 相对应的振荡周期 $\bar{T}_n = 2T, (2/3)T, (2/5)T, \dots$ 。基模振荡周期为 $2T$ 。事实上振荡周期与以上数值有一定偏差, 各模之间相互迭加和相互作用产生和频和差频效应, 造成十分复杂的混沌态频谱。从(17)式可以看到, 长延时不稳定的阈值条件较低, 各模极易满足不稳定阈值条件形成多模振荡, 因而在长延时下一般从 $2T$ 波到混沌态的变化很快, 上支振荡不易观察到 $4T, 8T$ 的波。

对于长延时, $T \gg \tau_0$, (6)式可简化为 $\phi(t) = \phi_0 + f\{I_i \tau [\phi(t-T)]\}$ 。令 $\phi_n = \phi(t-T)$, $\phi_{n+1} = \phi(t)$, 则得

$$\phi_{n+1} = \phi_0 + f[I_i \tau (\phi_n)]. \quad (18)$$

这是一个一阶差分方程。沿袭已经报道过的分析方法^[9,10], 可以得到 $2T, 4T, 8T, \dots$ 等 $2^n T$ 周期倍增结果, 即周期振荡的无限分岔导致混沌。

四、混合装置的实验观察

我们用 LiNbO_3 电光偏振调制器加线性反馈构成的光学双稳装置, 观察 Ikeda 不稳定性。具体实验装置如图 4 所示, 两偏振器的偏振方向相互平行, 与晶体的 $X(Y)$ 轴成 45° , 沿 Z 轴方向透光。晶体的半波电压为 200V , 反馈光电信号的延迟通过具有数模转换器的

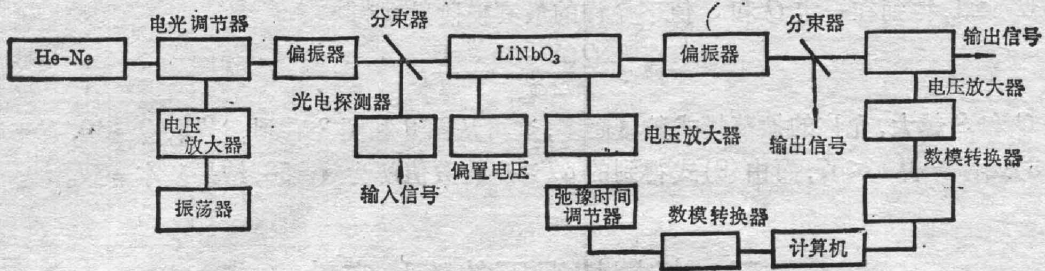


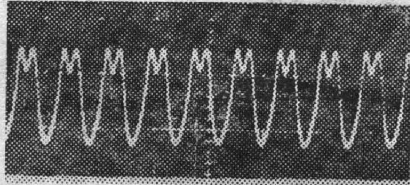
图 4 观察延时反馈光学双稳性不稳定性的实验装置

Fig. 4 The experimental setup to observe Ikeda instability in optical bistability with delay feedback

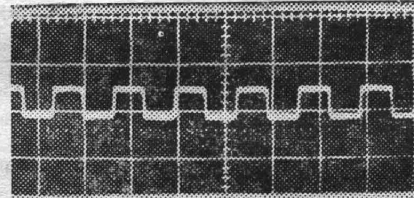
DBJZ-80 单板电子计算机实现。入射光强用另一支电光调制器调控。其动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} I_i(t) &= I_i(1 + M \cos \phi)/2, \\ \tau(d\phi/dt) + \phi &= \phi_0 + KI_i(t-T), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

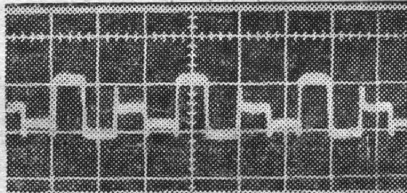
式中 M 为调制深度, K 与光电转换系数有关。



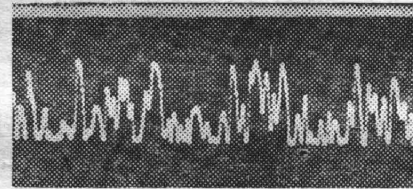
(a) $Q=0.7, \phi_0=-1.25\pi$ 短延时 $3.8T$ 波形



(b) $Q=20, \phi_0=0$ 长延时 $2T$ 波形



(c) $Q=20, \phi_0=0$ 长延时 $4T$ 波形



(d) $Q=20, \phi_0=0$ 长延时混波形

图 5 延时反馈混合光学双稳装置的输出波形

Fig. 5 Waveforms of output in hybrid OBD with delay feedback

实验中计算机的取样周期为 $160 \mu s$, 系统响应时间为 $1 ms$, 延迟时间可调。图 5 是输出光的振荡波形, 其中 (a) 为 $Q=0.5, \phi_0=-1.25\pi$ 短延时的基波 ($4T$ 波形), 显示了类正弦波近似; (b) 为 $Q=20, \phi_0=0$ 的长延时基波 ($2T$) 方波波形; (c) 为 $Q=20, \phi_0=0$ 的长延时 $4T$ 方波波形; (d) 为 $Q=20, \phi_0=0$ 的混沌波形。图 6 给出 $Q=20$ 时在对应不同初相移下的 I_s-I_i 双稳曲线上出现的不稳定性。其中 (a) 显示了 $\phi_0=0$ 时在下支上发生由 $2T, 4T$ 倍周期分岔直至混沌的过程; (b) 显示了 $\phi_0=-0.5\pi$ 的 I_s-I_i 分岔图, 由图可见下支从稳态分岔成为 $2T$ 波, 再倍分岔成为 $4T$ 波, 之后成为上下两支混沌波, 再回到 $4T$ 波, 又回到 $2T$ 波, 然后迅速进入混沌状态; (c) 为 $\phi_0=-1.5\pi$ 时上下两支同时发生振荡, 下支为 $2T$ 波, 上支则由 $2T$ 倍分岔进入混沌。以上三种情况下不稳定的阈值点都发生于 $S_0=2$ 左右。图 7 给出在相同初相移 ($\phi_0=-1.25\pi$) 下不同相对延时相应的不稳定现象: (a) 为 $Q=20$ 长延时情况, 不稳定性起始于双稳态上支的极左端, 约 $S_0=2$, (b) 为 $Q=0.5$ 短延时的情况, 由图可见

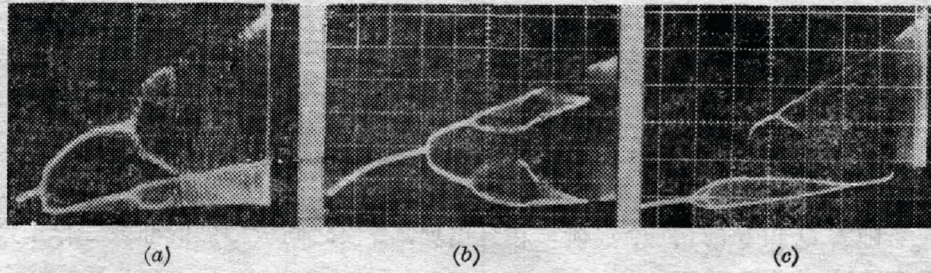


图 6 长延时($Q=20$)混合光学双稳装置的 I_1-I_2 分岔图
 Fig. 6 I_1-I_2 bifurcation diagram in hybrid OBD with long delay ($Q=20$)
 (a) $\phi_0=0$; (b) $\phi_0=-0.5\pi$; (c) $\phi_0=-1.5\pi$

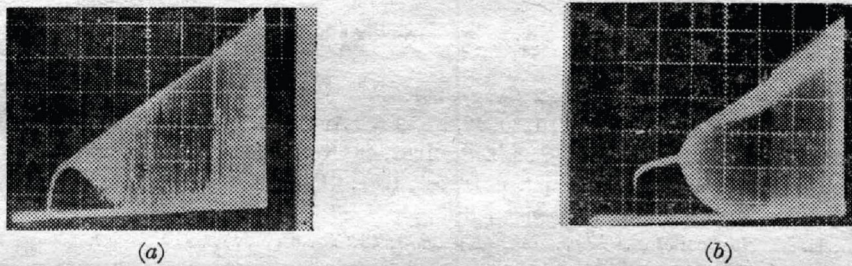


图 7 相同初始位相不同延时下混合光学双稳装置具有不同的阈值起振点 S
 Fig. 7 Hybrid OBD with different delay times under same initial phase shift has
 different points to start oscillation

(a) $Q=20, \phi_0=-1.25\pi$; (b) $Q=0.5, \phi_0=-1.25\pi$

不稳定起始阈值点发生明显右移, 稳定度 S 大大提高^[8], 由(17)式计算得 $S_0 \cong 4$, 与实验结果相符。

五、结 论

光学双稳性的稳定性和 Ikeda 不稳定性之间存在着密切联系, 静态稳定度 S 是这两类稳定性联系的纽带。在稳定情况下, 光学双稳性出现的必要条件是 $S < 0$ 不稳态的存在。上下两支稳态满足条件 $S > 1$, 不稳态与稳态间的过渡是 $0 \leq S \leq 1$ 的光放大态, 光放大态剧烈的正反馈导致双稳态在两稳态间的开关动作。稳态则是负反馈起主导作用。

具有延时反馈的光学双稳性的 Ikeda 不稳定性依赖于相对延时 Q 和静态稳定度 S 两个因素。不稳定行为在长延时下对静态稳定度要求不高, 仅需满足 $S \geq 2$ 。在短延时下则要求有很高的静态稳定度 $S \geq 1 + (\pi/2Q)$ 。

混合光学双稳器件采用电反馈易于实现长延时, 因而易于显示 Ikeda 不稳定性。本征光学双稳器件采用光腔反馈, 延迟时间短, 不易实现 Ikeda 不稳定性。但是本文研究指出, 如果在短延时情况下设法增大静态稳定度 S 也可能实现不稳定性。对本征型器件, 提高 F-P 腔的精细度, 采用线性背景吸收小而非线性强的介质, 或者提高入射光强以产生高级次的双稳, 都有利于提高稳定度 S , 从而有可能显示 Ikeda 不稳定行为。

S 值越大, 表明系统稳定性越高, 而延时反馈的情况下越不稳定, 如何解释这种似乎矛

盾的现象,这是因为 S 反映了反馈与非线性作用的强度。稳态情况下 S 越大表明负反馈越强,系统越稳定。在延时反馈情况下,延时的作用破坏了这种负反馈行为,而转变成强烈的正反馈,导致 Ikeda 不稳定性, S 越大,正反馈越强烈,系统当然越不稳定。

延时引起的正反馈作用使系统发生振荡,这种振荡按傅里叶级数展开可能有多种频谱。由于低价模易于达到阈值条件而首先发生振荡,长延时下首先出现 $2T$ 模,短延时下首先出现 $4T$ 模。随着 Q 和 S 的增加,高阶模相继出现,各模之间极强烈的非线性作用产生数量众多的新频谱,构成混沌输出。

作者衷心感谢中国科学院科学基金的资助。

参 考 文 献

- [1] K. Ikeda; *Opt. Commun.*, 1979, **30**, No. 2 (Aug), 257.
- [2] K. Ikeda, H. Daido; *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **49**, No. 9 (30 Aug), 709.
- [3] H. M. Gibbs, F. A. Hopf *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **46**, No. 7 (16 Feb), 474.
- [4] M. Okada, K. Takizawa; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1981, **QE-17**, No. 12 (Dec), 2135.
- [5] J. Y. Gao, J. M. Yuan *et al.*; *Opt. Commun.*, 1983, **44**, No. 3 (1 Jan), 201.
- [6] J. Y. Gao, L. M. Narducci *et al.*; *Phys. Rev. (A)*, 1983, **28**, No. 5 (Nov), 2910.
- [7] 李淳飞;《物理》,1982, **11**, No. 11 (Nov), 666.
- [8] 李淳飞,陈历学;《光学学报》,1984, **4**, No. 10 (Oct), 907.
- [9] H. M. Gibbs, F. A. Hopf *et al.*; *Proc. Conf. SPIE, Huntsville, AL, 1981*, B7-144.
- [10] A. Neyer, E. Voges; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1982, **QE-18**, No. 12 (Dec), 2009.

Ikeda instability and degree of stability in optical bistability

CHEN LIXUE LI CHUNFEI AND HONG JING

(Harbin Institute of Technology)

(Received 7 May 1984; revised 27 August 1984)

Abstract

The degree of stability which describes intensity of feedback is introduced into the dynamic equations of optical bistability with delayed feedback. In addition to relative delay time, the degree of stability also affects the instability behaviors of the system, including threshold condition and oscillation modes of instability. The threshold condition of instability is $S \geq 2$ for long delay and $S \geq 1 + \pi/2Q$ for short delay. The experiment by a hybrid OBD shows oscillation, bifurcation and chaos and verifies theoretical analysis. The results show the close relation between Ikeda instability and stability in OBD. New basis to realize Ikeda instability in intrinsic OBD has been provided.