

同步泵浦染料激光脉冲形状 非对称性的理论分析

鲍晓毅 关信安
(南开大学物理系)

提 要

本文用拉格朗日乘子法求解三阶增益展开的锁模方程,得到了同步泵浦染料激光脉冲的非对称形状,并对非对称因子 μ 作了定性、定量解释。

关于同步泵浦染料激光脉冲形状, Ausschnitt 等^[1]曾通过对增益 $G(t)$ 的二阶展开,得到了对称的高斯脉冲形状。但是,后来 New 推断^[2]同步泵浦染料激光脉冲形状应当是非对称的,因此对称形状解是不符合实际的。我们注意到 Herrmann 和 Motschman^[3,4]通过对染料四能级系统的非线性微积分方程实施近似修正,得到与脉冲形状非对称性有关的 μ 因子,从而说明了 New 的同步泵浦染料激光脉冲为非对称脉冲的推断^[2]。但是,在文献[3]和[4]中并未给出非对称因子 μ 的具体含义和定量表示以及非对称脉冲形状。

本文提出了一种对锁模方程中的增益 $G(t)$ 泰勒展开到三级的模型,通过使用数学上的拉格朗日乘子法的近似,得到了非对称因子 μ 的具体形式。经过一定的数学运算,可以进一步解释文献[3]、[4]中所给出的定性特征。

一、方程的引入

实验中所用的同步泵浦染料激光器有三部分组成:一个泵浦放大器、一个激光腔以及一个可供选择内腔带宽、波长可调谐的光学滤波器。对于染料脉冲包络 $V(t)$ 有下面的方程^[1]:

$$\left[G(t) - L + \delta T \frac{d}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2}{dt^2} \right] V(t) = 0, \quad (1)$$

式中 $G(t)$ 为往返增益, L 为腔损耗, ω_0 为光学滤波器所确定的内腔带宽。 $\delta T = T_p - T_d$ 它是泵浦光脉冲与染料光脉冲的同步失配参数(T_p 和 T_d 分别为泵浦和染料光脉冲的重复周期)。由(1)式可知,为求解 $V(t)$ 就必须给出 $G(t)$,即要知道在染料脉冲 $V(t)$ 附近增益的精确模型。我们采用文献[1]的增益模型,染料激光器的增益可由下面简单的速率方程来确定^[1]:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG_0}{dt} - I(t)G(t), \quad (2)$$

式中 G_0 为由泵浦脉冲确定的小信号增益。展开 $G(t)$ 到三阶级数,我们得到在染料脉冲峰

值位置 $t=0$ 附近的增益为:

$$G(t) = G_{s_0} \left(1 - \int_{-\infty}^0 I(t) dt \right) + \left(\frac{1}{\tau_r} - I_0 G_{s_0} \right) t - \left[\frac{1}{\tau_c} + \frac{I_0}{\tau} \left(\frac{1}{\tau_r} - I_0 G_{s_0} \right) \right] t^2 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{\tau_c^3} + I_0 \left[\frac{2}{\tau_c^2} + I_0 \left(\frac{1}{\tau_r} - I_0 G_{s_0} \right) \right] - G_{s_0} \frac{d^2 I}{dt^2} \Big|_0 \right\} t^3, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{s_0} &= G_s(0), & \frac{1}{\tau_r} &= \frac{dG_s}{dt} \Big|_0, \\ \frac{1}{\tau_c^2} &= -\frac{1}{2} \frac{d^2 G_s}{dt^2} \Big|_0, & \frac{1}{\tau_c^3} &= \frac{1}{3} \frac{d^3 G_s}{dt^3} \Big|_0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

二、方程的求解

设原来增益展开到二阶的结果为 V_2 , 现在令增益展开到三阶的结果为 V_3 , 引用拉格朗日乘子公式后的结果应为

$$V_3 = V_2 \Big|_{O'=0} + \frac{\partial V_2}{\partial O'} \Big|_{O'=0} (O' - O). \quad (5)$$

关于 O 和 O' 的定义

方程(3)可以令

$$G(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3. \quad (6)$$

由于二阶与三阶展开的不同在于原来二阶展开的系数 Ct^2 变成 $Ct^2 + Dt^3 = (C + Dt)t^2 = C't^2$.

利用文献[1]所得的二阶解结果 $V_2 \sim \exp(-t^2/2\tau^2)$ 得到

$$V_3 = \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \left(1 - \frac{Dt^3}{4C\tau^2}\right), \quad (7)$$

将(7)式代入(1)式中, 求解后有

$$C = \frac{-3}{2\omega_c^2 \tau^4}, \quad D = \frac{1}{\omega_c^4 \tau^6 \delta T}. \quad (8)$$

由于染料脉冲的光强正比于包络的平方, 所以 $I(t) \sim I_0 |V(t)|^2$. 即*

$$I(t) = I_0 \left(1 - \frac{Dt^3}{4C\tau^2}\right)^2 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) = I_0 \left(1 + \frac{t^3}{6\omega_c^2 \tau^4 \delta T}\right)^2 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right). \quad (9)$$

三、讨 论

1. 脉冲形状与内腔带宽、脉宽及失谐的关系

由(9)式可以清楚地看出, 同步泵浦染料激光脉冲的形状是非对称的, 其非对称性和内腔带宽 ω_c 、染料脉宽 τ 及失配因子 δT 直接相关, 具体的影响程度分别如图 1、图 2、图 3 和图 4 所示。

(1) 图 1 是不同脉宽变化情况下的非对称形状, 脉宽较窄时, 脉冲形状的非对称性较大, 且其对应着较大的泵浦能量, 形状的非对称程度也较严重(这时 $L_{dye} > L_{pump}$)。

* 详见附录 1。

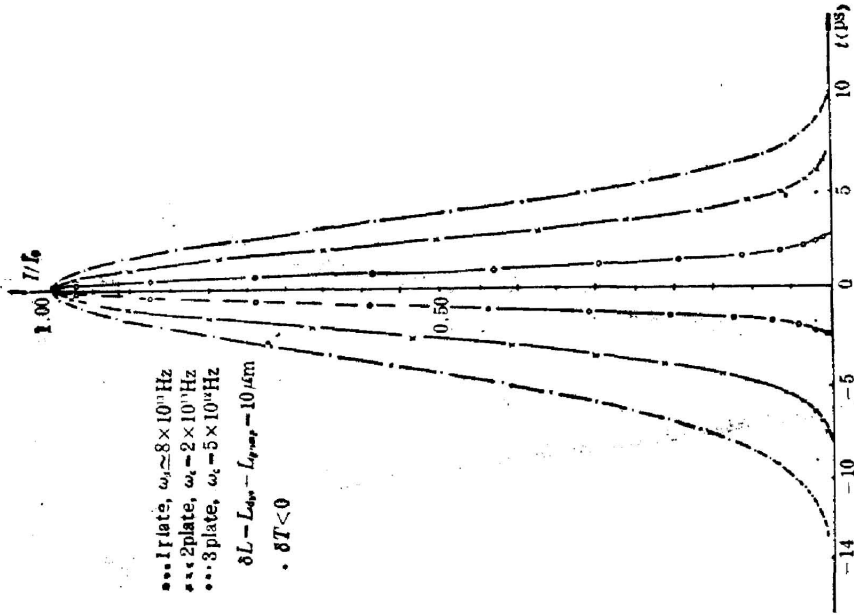


图 2 不同内腔带宽对脉冲形状的影响

Fig. 2 The effect of intracavity bandwidth on pulse shape

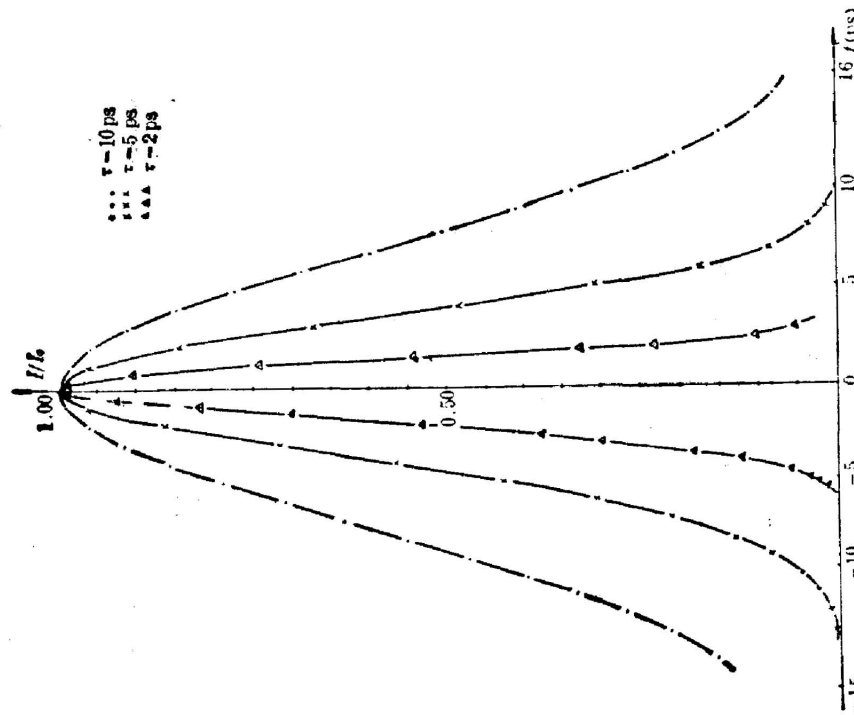


图 1 不同脉宽对脉冲形状的影响

Fig. 1 The effect of pulse width on pulse shape

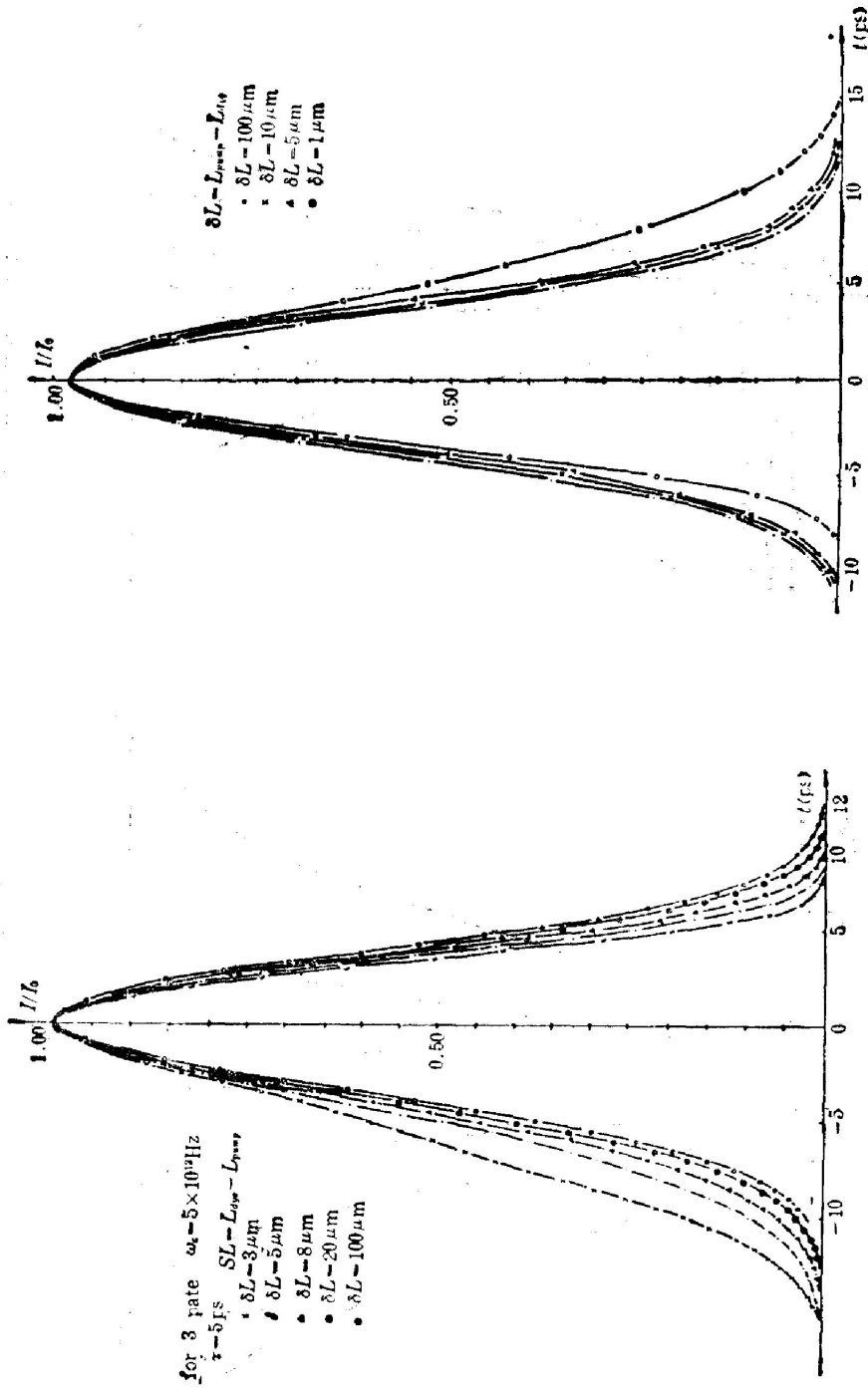


图 3 不同腔长失配对脉冲形状的影响

Fig. 3 The effect of cavity length detuning on pulse shape

图 4 不同腔长失配对脉冲形状的影响

Fig. 4 The effect of cavity length detuning on pulse shape

(2) 图 2 是不同内腔带宽*对应的脉冲形状变化, 由图可见: 当 ω_c 增大时, 上升与下降时间之差很小, 非对称性减小; 脉冲峰值靠向 $t > 0$ 的方向(这时 $L_{dye} < L_{pump}$)。

(3) 图 3 和图 4 对应于 $L_{dye} > L_{pump}$ 和 $L_{dye} < L_{pump}$ 两种失配情况下脉冲形状的变化。

当 $L_{dye} > L_{pump}$ 时(图 3), 脉冲峰值偏向 $t > 0$ 的方向, 这时上升时间长于下降时间, 而且随失配 δL 的增大, 脉冲逐渐变得对称起来, 对于 $t \approx 0$ 附近, 脉冲基本上是对称的, 而且失配的影响较小。当 $\delta L \geq 10 \mu\text{m}$ 时, 随失配量的增大, 脉冲形状变化不大, 即当 δL 较大时, 无论 δL 变化几个 μm 还是几十个 μm , 结果脉冲形状基本不变。

当 $L_{dye} < L_{pump}$ 时(图 4), 脉冲峰值偏向 $t < 0$ 的方向。这时上升时间短于下降时间。同上面图 3 中的情况类似, 我们又看到随失配 δL 的增大, 脉冲逐渐变得对称起来, 以及 $t \approx 0$ 附近时脉冲的几个特征。

图 3、图 4 的不同点在于脉冲的峰值偏向不同, 峰值偏向的多少和失配的取值大小直接相关。进一步, 我们从(9)式还可以直接看到: 偏离量还应当和内腔带宽 ω_c 、输出脉宽(包括泵浦能量和泵浦脉宽)有关。

2. 对 Herrmann 等人的结果的进一步解释

Herrmann 和 Motschman 曾在文献[3]、[4]中定义染料脉宽 $\tau = \tau_f - \tau_r$ (脉冲峰值的 FWHM), 当 $\tau_f \leq \eta \leq \tau_r$ 时, 有输出光子流密度

$$N = N_0 [1 - (\eta^2/\theta^2) + \mu(\eta^3/\theta^3)], \quad (10)$$

式中 θ 和 μ 分别是测量到的脉宽、形状的非对称性。对(9)式实施合理的数学近似(详见附录 2)后有:

$$I \sim I_0 [1 - (t^2/\tau^2) + (1/3\omega_c^2 \tau \delta T)(t^3/\tau^3)]. \quad (11)$$

将方程(10)与方程(11)比较, 可以得到(10)式中的非对称因子 μ 为

$$\mu = (1/3\omega_c^2 \tau \delta T). \quad (12)$$

而文献[3]和[4]均未给出非对称因子 μ 的解析表达式。显然通过分析, 给出了文献[3]和[4]中所没有能够给出的 μ 的定量和定性意义。

根据(12)式画出图 5, 由图 5 可知, 对于不同的脉宽和 $\delta T \omega_c$ 情况, 非对称因子 μ 的变化。

由于(12)式给出了 μ 因子的数学表达式, 因此, 我们也可以和 Herrmann 等人一样, 从 μ 因子的角度出发, 来讨论脉冲形状的非对称性与内腔带宽, 脉冲宽度以及失配因子的关系。但是这样做的缺陷是: 由图 5 无法看出脉冲形状究竟如何, 不如图 1~图 4 那样一目了然。

这里有一点值得注意的是: 在文献[3]和[4]中, 讨论非对称因子 μ 时, 只讨论了 $L_{dye} > L_{pump}$ 的情况, 而没讨论 $L_{dye} < L_{pump}$ 的非对称情况。而我们得到的(9)式也适于这种情况, 这时脉冲形状的变化可以从图 4 中看到。

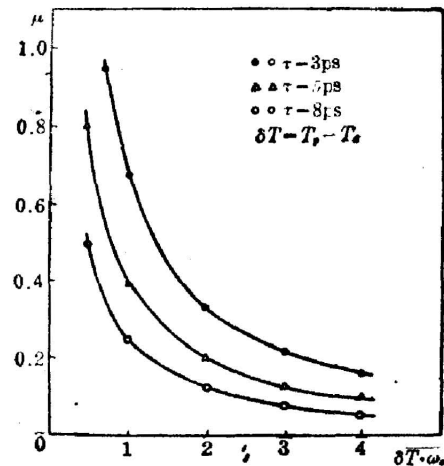


Fig. 5

* 内腔带宽的调节是通过改变内腔双折射滤光片来实现的。

四、结 论

本文通过求解三阶增益展开的锁模方程,给出了同步泵浦染料激光脉冲的非对称形状,并对非对称因子 μ 作了定量的解释。

最后应当指出:本文所述方法原则上可推广到四阶五阶甚至更高阶展开情况。

沈寿春教授审阅了文本,作者在此表示感谢。

(附录 1)

由锁模方程:

$$\left[G(t) - L - \delta T \frac{d}{dt} + \frac{1}{\omega_c^2} \frac{d^2}{dt^2} \right] V(t) = 0, \quad (\text{A } 1)$$

将三阶增益展开式(6)代入(A 1)式后有

$$\left[A + Bt + Ct^2 + Dt^3 - L - \delta T \frac{d}{dt} + \frac{1}{\omega_c^2} \frac{d^2}{dt^2} \right] V(t) = 0. \quad (\text{A } 2)$$

同时,在(7)式的求解中注意到

$$D = \frac{1}{6} \left\{ \frac{3}{\tau_c^3} + I_0 \left[\frac{2}{\tau_c^2} + I_0 \left(\frac{1}{\tau_c} - I_0 G_{*0} \right) \right] - G_{*0} \frac{d^2 I}{dt^2} \Big|_0 \right\}, \quad (\text{A } 3)$$

$$C = - \left[\frac{1}{\tau_c^2} + \frac{I_0}{2} \left(\frac{1}{\tau_c} - I_0 G_{*0} \right) \right]. \quad (\text{A } 4)$$

引入[1]中的二阶解的结果

$$G_{*0} \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau I_0 \right) - L = \frac{1}{\omega_c^2 \tau^2},$$

$$(\tau/\tau_c) - I_0 G_{*0} \tau = (\delta T/C), \quad 2(\tau^2/\tau_c^2) + I_0 \delta T = (2/\omega_c^2 \tau^2). \quad (\text{A } 5)$$

可得

$$C_0 = -1/\omega_c^2 \tau^4. \quad (\text{A } 5)$$

此处 C_0 为二阶增益展开下的系数。

$$\therefore V_2 \sim \exp(-t^2/2\tau^2) = \exp(-t^2 \sqrt{-\omega_c^2 C_0}/2). \quad (\text{A } 6)$$

将(A 6)式代入(5)式中有

$$V_3 = \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \left(1 - \frac{Dt^3}{4C\tau^2}\right). \quad (\text{A } 7)$$

将(A 7)式代入得(A 2)中,并比较系数后得到三阶增益展开下系数为

$$A - L - (1/\omega_c^2 \tau^2) = 0, \quad (\text{A } 8)$$

$$B - (\delta T/\tau^2) - (3D/2C\omega_c^2 \tau^2) = 0, \quad (\text{A } 9)$$

$$C + (1/\omega_c^2 \tau^4) - (3D\delta T/4C\tau^2) = 0, \quad (\text{A } 10)$$

$$D - \frac{AD}{4C\tau^2} + \frac{J_0 D}{4C\tau^2} + \frac{7D}{4C\omega_c^2 \tau^4} = 0. \quad (\text{A } 11)$$

求解(A 8)、(A 9)、(A 10)、(A 11)式有

$$\left. \begin{aligned} A &= L + (1/\omega_c^2 \tau^2), \\ B &= (\delta T/\tau^2) - (1/\omega_c^2 \tau^4 \delta T), \\ C &= -3/2\omega_c^2 \tau^4, \\ D &= 1/\omega_c^2 \tau^6 \delta T. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A } 12)$$

将(A 12)式代入(7)式后,就有方程(9)式的结果。

(附录 2)

由方程(9)式

$$I(t) = I_0 \left(1 + \frac{t^3}{3\omega_c^2 \tau^3 \delta T} \right)^2 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right).$$

下面我们来看如何做数学处理:

由于括号内第二项的量级为 10^{-2} , 所以我们可以用: $(1+x)^2 \doteq 1+2x$, 对于指数部分, 在 (t/τ) 较小时, 也可使用展开为 $\exp(-x^2) \doteq 1-x^2$

$$\therefore I(t) \sim I_0 \left(1 + \frac{t^3}{3\omega_c^2 \tau^3 \delta T} \right) \left(1 - \frac{t^2}{\tau^2} \right) \doteq I_0 \left(1 - \frac{t^2}{\tau^2} + \frac{1}{3\omega_c^2 \tau \delta T} \frac{t^3}{\tau^3} \right),$$

即得到方程(11)式的结果。

参 考 文 献

- [1] C. P. Ausschnitt, R. K. Jain *et al.*; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1979, **QE-15**, No. 9 (Sep), 912.
- [2] G. H. C. New; *Rep. Prog. Phys.*, 1983, **46**, No. 8 (Aug), 877.
- [3] J. Herrmann, U. Motschman; *Appl. Phys.*, 1982, **B27**, No. 1 (Jan), 27.
- [4] J. Herrmann, U. Motschman; *Opt. Commun.*, 1982, **40**, No. 5 (1 Feb), 379.

Theoretical analysis of asymmetric pulse shapes in synchronously pumped dye lasers

BAO XIAOYI AND GUAN XINAN

(Department of Physics, Nankai University, Tianjin)

(Received 3 January 1985; revised 5 July 1985)

Abstract

By expanding the gain of the mode-locked equation to the third order, we have solved the equation with the aid of the Lagrange multiplier method and obtained asymmetric pulse shapes in synchronously pumped dye lasers. We can thus give qualitative and quantitative accounts for the asymmetric factor μ .