第5卷 第11期 光学学报 Vol. 5, No. 11
1985年11月 ACTA OPTICA SINICA November, 1985

变折射率光线方程的一种数值解法

卢文全
(桂林光通信研究所)

提要

根据变换后的光线方程，导出了一套变折射率介质中寻求光线方程数值解的迭代公式。两个典型的计算实例表明，本文提出的光线方程数值解法是一个较为普遍而节省计算时间的方法。

一、引言

光线在空间传播须满足光线方程[1]

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\boldsymbol{R}}{ds}\right)=\mathrm{grad}(n), \tag{1}$$

式中 ds 是光线轨迹上的线元；n 是以 $\boldsymbol{R}$ 为自变量的折射率分布函数；$\boldsymbol{R}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是光线上点的位置坐标矢量。

方程(1)仅在少数几种情况有解析解。近十多年来，由于变折射率光学的兴起和发展，人们对寻求光线方程的数值解产生了兴趣[2]。

1968年 Montagnino[3] 把光线上点的坐标矢量 $\boldsymbol{R}$ 和该点的光线方向 $\boldsymbol{S}$ 展开成泰勒级数，求得方程(1)的数值解。这一方法不便计算级数的高次项系数，仅靠减小计算步长来提高计算精度；同时计算用时较多。1982年 Sharma 等[4]把方程(1)稍作变换，用标准的龙格-库塔方法求得数值解。但其计算精度仍然只能靠改变计算步长来控制。我们发现，从 Sharma 变换后的光线方程出发，采用泰勒级数展开时，其高次项系数可由迭代方式得到。这样，计算精度不仅可用计算步长，而且还可用计算所包含的级数项数来调整。在给定的介质区域内，当计算精度均满足要求时，计算即告结束。

下面首先介绍本文计算原理，然后对两种典型的折射率分布进行计算，并对结果作一简单讨论。

二、数值计算原理

按照文献[4, 5]，将(1)式化为如下形式：

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}=\boldsymbol{F}, \tag{2}$$

式中 $dt=\dfrac{ds}{n}$，

收稿日期：1985年1月31日；收到修改稿日期：1985年4月11日

$$\boldsymbol{F}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}(n^2), \text{ or} & (3a)\\ n\cdot\mathrm{grad}(n); & (3b)\end{cases}$$

并且定义一个矢量 $\boldsymbol{T}$ 满足

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\boldsymbol{T}, \tag{4}$$

使(2)式化为

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}=\boldsymbol{F}。 \tag{5}$$

方程组(4)和(5)的数值解文献[4, 5]用标准的龙格-库塔方法求得。这里我们把矢量 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 按参数 t 展开成泰勒级数,并利用(4)式和(5)式得到

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(t_0)+\boldsymbol{T}(t_0)\Delta t+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{F}^{(i-1)}(t_0)\frac{\Delta t^{i+1}}{(i+1)!}, \quad m=1, 2, 3, \cdots, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(t_0)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{F}^{(i-1)}(t_0)\frac{\Delta t^{i}}{i!}, \quad m=1, 2, 3, \cdots, \tag{7}$$

式中

$$\boldsymbol{F}^{(i)}=\frac{d^i\boldsymbol{F}}{dt^i}, \tag{8}$$

Δt 就是数值计算时取的步长。目前,变折射率光学仅限于讨论各向同性的情形[2]。因此矢量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{T}$(和 t)无关;此外,设介质的折射率分布为球对称,径向对称或轴向分布,则可由(3)式推导出一套计算 $\boldsymbol{F}$ 高阶导数 $\boldsymbol{F}^{(i)}$ 的迭代公式如下:

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}^{(0)}=a_0\boldsymbol{R},\\ a_0=\dfrac{1}{2R}\cdot\dfrac{\partial n^2}{\partial R},\end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}^{(i)}=(a_0\boldsymbol{R})^{(i)}, \quad i=1, 2, 3, \cdots, m,\\ a_0^{(i)}=(a_1b)^{(i-1)},\\ a_1=\dfrac{1}{R}\cdot\dfrac{\partial a_0}{\partial R},\\ b=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{T},\\ a_1^{(i-1)}=(a_2b)^{(i-2)},\\ a_2=\dfrac{1}{R}\cdot\dfrac{\partial a_1}{\partial R},\\ \quad\vdots\\ a_j^{(i-j)}=(a_{j+1}\cdot b)^{(i-j-1)}, \quad j=1, 2, 3, \cdots, i,\\ a_{j+1}=\dfrac{1}{R}\cdot\dfrac{\partial a_j}{\partial R},\\ \quad\vdots\\ a_{j-1}=a_j\cdot b,\\ a_j=\dfrac{1}{R}\cdot\dfrac{\partial a_{j-1}}{\partial R}。\end{cases} \tag{10}$$

利用微分学中的莱布尼兹公式不难计算(10)式中

$$\begin{cases}\dfrac{d^i(a_0\cdot\boldsymbol{R})}{dt^i}=(a_0\cdot\boldsymbol{R})^{(i)},\\ \dfrac{d^i(a_j\cdot b)}{dt^i}=(a_j\cdot b)^{(i)},\\ \dfrac{d^i(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{T})}{dt^i}=(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{T})^{(i)}。\end{cases}\tag{11}$$

根据(4)式和(5)式还有

$$\begin{cases}\dfrac{d^i\boldsymbol{R}}{dt^i}=\boldsymbol{R}^{(i)}=\boldsymbol{T}^{(i-1)},\\ \dfrac{d^i\boldsymbol{T}}{dt^i}=\boldsymbol{T}^{(i)}=\boldsymbol{F}^{(i-1)}。\end{cases}\tag{12}$$

这样，给定了折射率分布函数 $n(R)$，光线的初始位置 $\boldsymbol{R}(t_0)$和初始方向 $\boldsymbol{T}(t_0)$之后，可由(6)～(12)这套公式进行追迹计算，求出方程(4)和(5)，亦即方程(1)的数值解。利用我们定义的误差函数[5]

$$f(K,\ T)=\log|\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{T}|,\tag{13}$$

可检验上述追迹计算的可靠性，式中

$$\boldsymbol{K}=\frac{1}{n^4}[n^2\boldsymbol{F}^{(0)}-(\boldsymbol{F}^{(0)}\cdot\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}],\tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{F}^{(0)}$即文献[5]中的 $\boldsymbol{F}$。

三、计算例子

首先我们考查折射率分布为[4]

$$\begin{cases}n^2=n_0^2-g^2R^2,\\ R^2=x^2+y^2\end{cases}\tag{15}$$

时的计算误差。把(15)式代入(9)式和(10)式得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}^{(0)}=-g^2\boldsymbol{R},\\ \boldsymbol{F}^{(1)}=-g^2\boldsymbol{T},\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{F}^{(i)}=-g^2\boldsymbol{F}^{(i-2)}。\end{cases}\tag{16}$$

将(16)式代入(6)、(7)、(14)和(13)式得到了如图 1 和图 2 所示的结果。图 1 中的位置误差 $P(R)$定义为

$$P(R)=\log\Big||R|-|R_a|\Big|,\tag{17}$$

式中 R_a 是折射率分布为(15)式时的解析解[2]；R 则是本文的数值计算结果。图 1 中的虚线是文献[5]用龙格-库塔方法计算的值。它与本文 $m=4$ 的结果十分接近。此外，由图 2 可见，函数 $f(K,\ T)$与位置误差 $P(R)$存在着简单的关系。

其次，我们对由(18)式所描述的所谓理想折射率分布[6]进行了计算。

$$\begin{cases}n^2=n_0^2\left(1-g^2R^2-\dfrac{2}{3}g^4R^4-\dfrac{17}{45}g^6R^6\right),\\ R^2=x^2+y^2。\end{cases}\tag{18}$$

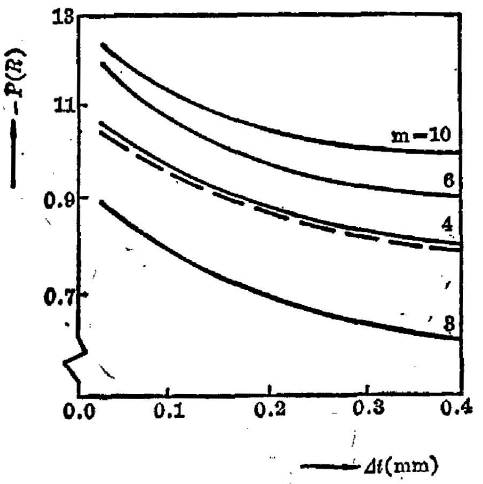

图1 位置误差 $P(R)$ 与步长 Δt 的函数关系。$n_0^2=2.5$; $g^2=0.1/\mathrm{mm}^2$

Fig. 1 Relation between position error $P(R)$ and extrapolation increment Δt, with $n_0^2=2.5$; $g^2=0.1/\mathrm{mm}^2$

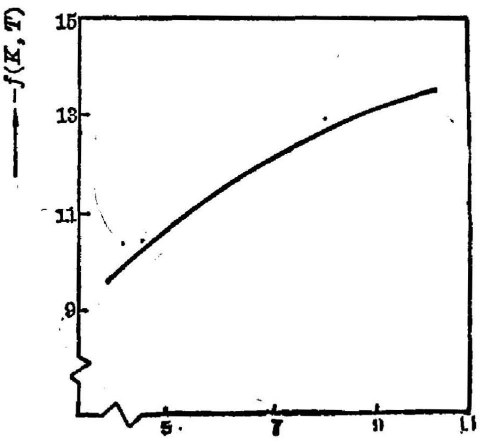

图2 误差函数 $f(K, T)$ 与位置误差 $P(R)$ 的关系曲线。$n_0^2=2.5$; $g^2=0.1/\mathrm{mm}^2$

Fig. 2 Relation between error function $f(K, T)$ and position error $P(R)$, with $n_0^2=2.5$; $g^2=0.1/\mathrm{mm}^2$

把(18)式代入第二节中的有关公式，得到其计算结果示于图3。由这一结果可以看出，只要取不多的级数项数 m 便可以以足够的步长 Δt 获得满足实际需要的计算精度。

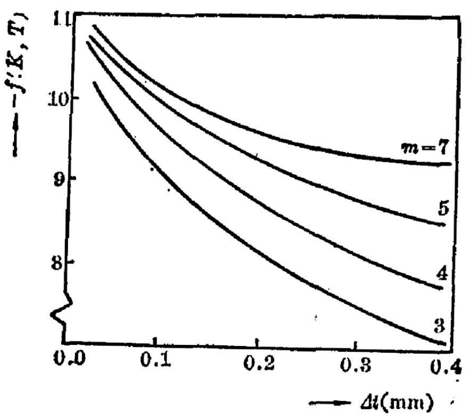

图3 误差函数 $f(K, T)$ 与步长 Δt 的关系曲线。$n_0^2=2.5$; $g^2=0.1/\mathrm{mm}^2$

Fig. 3 Relation between error function $f(K, T)$ and extrapolation increment Δt with $n_0^2=2.5$; $g^2=0.1/\mathrm{mm}^2$

四、讨论与结论

本文获得的(6)～(12)以及(14)和(13)等公式，特别便于计算机语言程序的组织和编制，从而可以迅速完成变折射率介质中的光线追迹。按文献[4]对计算用时的推算方法，由图

1～3可见，在达到相同计算精度的情况下，本文方法的计算用时与 Sharma 等人的方法相当，从而比 Montagnino 的方法大大节省计算时间。图1中的虚线还说明，Sharma 等人的方法仅是本文方法的特例($m\approx4$)，因此，可以认为我们找到的是一个较为普遍而又节省计算时间的光线方程数值解法。

应当指出，Sharma 等人[4]所完成的光线方程的变换，对于几何光学的发展，尤其是对于变折射率光学来说，具有重要的意义。很明显，从数学上看，方程(2)与力学中的牛顿方程完全一样。因此，人们可以借助于牛顿力学中的某些经验来处理几何光学问题，或者相反。例如，本文中的(6)～(12)这套公式，对于处理有势力场中不计阻力的某些力学问题也将是适用的。

本文部分结果是作者在西德柏林技术大学进修期间取得的，特在此向该校物理系光学研究所的 J. Kross 教授和 H. Roeder 先生给予工作上的方便表示感谢。

参 考 文 献

[1] M. 玻恩和 E. 沃耳夫，《光学原理》，(杨葭荪等译校，科学出版社，北京，1978)上册第165页。
[2] E. W. Marchand, *«Gradient Index Optics»*, (Academic, New York, 1978), 7～72.
[3] L. Montagnino, *«J. Opt. Soc. Am. S»*, 1968, **58**, No. 10 (Oct), 1667.
[4] A. Sharma, *et al.*; *«Appl. Opt»*, 1982, **21**, No. 6 (Mar), 984.
[5] 卢文全，《光学学报》，1984, **4**, No. 11 (Nov), 1018.
[6] E. W. Marchand, *«Appl. Opt»*, 1982, **21**, No. 6 (Mar), 983.

A method of numerical solution for ray equation with varying refractive index

LU WENQUAN
(Guilin Institute of Optical Communication)

(Received 31 January 1985; revised 11 April 1985)

Abstract

The iteration formulas for numerical solution of ray equation have been derived according to transformed ray equation. Two typical numerical examples showed that the method is more general and requires much less calculation time to reach a desired accuracy.