

正支共焦非稳腔输出功率方程 及其数值计算方法

程祖海 何煦辉* 李再光
(华中工学院激光研究所, 武汉)

提 要

利用本文提出的分区积分方法, 推导出了正支共焦非稳腔输出功率方程, 因此方程对实验非稳腔的计算结果, 与实验数据能较好地吻合。

一、引 言

非稳腔以其大的横模体积和良好的输出光束质量在高功率激光器中得到了广泛地应用。对于非稳腔的研究, 一般以分析腔内振荡模式为主, 而对于其输出特性的研究还鲜于报道, 其原因在于求解腔内自洽场所满足的非涅耳衍射积分方程在数学上存在很大困难。本文从正支共焦非稳腔腔模振荡的特点出发, 将腔内振荡光场划分为有平面波和球面波叠加和只有单一平面波存在的两个区域, 利用光学谐振腔的电磁场理论, 采用旁轴近似, 均匀增益分布等假设, 以及分区积分方法, 推导出了输出功率的数学方程。用此方程在 PDP-11/70 计算机上进行了数值计算, 得到了与实验数据相吻合的理论计算结果。采用这种分区积分方法, 其突出的优点是节省机时, 缩减计算工作量, 它对于正支共焦非稳腔输出功率和效率的计算, 正确选取光腔参数具有实用价值。根据计算结果设计的正支共焦非稳腔, 在 HGL-84 型 5kW CO₂ 激光器上获得了基模输出功率 3.8kW, 电光转换效率达 9.8% 的满意结果。

二、输出功率方程的理论推导

如图 1 所示, 正支共焦非稳腔的一对自再现模分别为原点在虚共焦点 O 的向右传播的球面波和原点在无穷远处的向左传播的平面波。其波矢分别用 k_1 和 k_2 表示。在腔内振荡光场为轴对称的情况下, 球面波和平面波的复振幅可分别表为:

$$E_1(z, r, t) = \frac{g(z, r, t)}{\sqrt{z^2 + r^2}} \exp(i k \sqrt{z^2 + r^2} - i \omega t), \quad (1)$$

$$E_2(z, r, t) = f(z, r, t) \exp[-i(kz + \phi) - i \omega t], \quad (2)$$

式中, $k = |k_1| = |k_2| = \frac{2\pi}{\lambda}$, $g(z, r, t)/\sqrt{z^2 + r^2}$, $f(z, r, t)$ 分别为球面波和平面波的振幅函数, ϕ 为平面波的初始相位。

收稿日期: 1985 年 4 月 30 日

* 何煦辉现在国防科技大学物理系工作。

腔内总光场 E

$$E(z, r, t) = E_1(z, r, t) + E_2(z, r, t) = \left\{ \frac{g(z, r, t)}{\sqrt{z^2 + r^2}} \exp(i k \sqrt{z^2 + r^2}) + f(z, r, t) \exp[-i(kz + \phi)] \right\} \exp(-i\omega t), \quad (3)$$

为这两列波的叠加。

在图 1 所示坐标系中, 镜 M_1 和 M_2 的曲面方程可表示为:

$$\begin{cases} z = \sqrt{4(d+L)^2 - r^2} - (d+L), & (4) \\ z = \sqrt{4d^2 - r^2} - d. & (5) \end{cases}$$

根据驻波条件, 镜面 M_1 和 M_2 上的场强为零, 考虑到(4)、(5)式, 在旁轴近似:

$$\begin{cases} 4d^2 - r^2 \doteq 4d^2, \\ 4(d+L)^2 - r^2 = 4(d+L)^2 \end{cases}$$

的条件下, 可以求得球面波和平面波的振幅与相位关系满足:

$$\begin{cases} g(d+L, r, t) = -f(d+L, r, t) \times (d+L), & (6) \\ g(d, r, t) = -f(d, r, t) \cdot d, & (7) \\ \phi = -2k(L+d). & (8) \end{cases}$$

考虑到(8)式, 在 $z > d$ 的情况下, 方程(3)可改写为:

$$E(z, r, t) = \left\{ \frac{g(z, r, t)}{z} \exp\left[ik\left(z + \frac{r^2}{2z}\right)\right] + f(z, r, t) \exp[-ik(z - 2d - 2L)] \right\} \exp(-i\omega t). \quad (9)$$

在增益介质中, 一般形式的波方程可表示为^[1]:

$$\nabla^2 E = c^{-2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - c^{-1} G \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (10)$$

式中, c 为光速, G 为激光工作物质的增益系数。

忽略衍射对振幅分布的影响, 对(9)式所给出的场分布, 经过冗长的数学推导得到:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{1}{2} G g, \quad (11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} G f. \quad (12)$$

上式的矩阵形式为:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{1}{2} g \\ \frac{\partial f}{\partial z} & -\frac{1}{2} f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

即有:

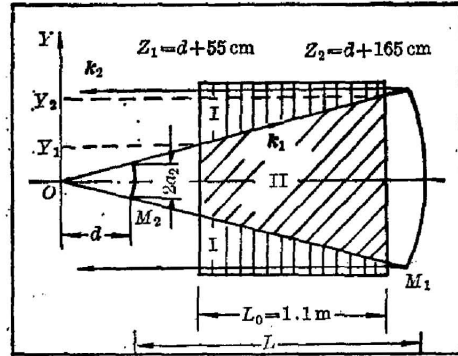


图 1 正支共焦非稳腔内振荡光场分区图
I: 只有平面波存在; II: 平面波和球面波叠加区

Fig. 1 Divided regions and propagating waves in a positive-branch confocal unstable resonator

I: plane wave only;
II: both spherical and plane waves

$$\frac{\partial f}{\partial z} g + \frac{\partial g}{\partial z} f = 0. \quad (14)$$

其原函数形式为:

$$f(z, r) \cdot g(z, r) = c(r). \quad (15)$$

引入函数 $\theta(z)$ 、 $f_0(r)$, 令其满足:

$$\begin{cases} f(z, r) = f_0 \exp[\theta(z)], \\ \theta(d+L) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

$$\theta(d+L) = 0. \quad (17)$$

由(6), (7), (15)和(16)式得到:

$$\begin{cases} c(r) = -(d+L) \cdot f_0^2(r), \\ c(r) = -d \cdot f_0^2(r) \exp[2\theta(r)], \\ \frac{L+d}{d} = \exp[2\theta(d)]. \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} c(r) = -d \cdot f_0^2(r) \exp[2\theta(r)], \\ \frac{L+d}{d} = \exp[2\theta(d)]. \end{cases} \quad (19)$$

$$\frac{L+d}{d} = \exp[2\theta(d)]. \quad (20)$$

注意到正支共焦非稳腔的几何放大率 $M = \frac{L+d}{d}$, 故方程(20)可变为:

$$\frac{1}{2} \ln M = \theta(d). \quad (21)$$

将(16), (18)式代入(15)式, 得到:

$$g(z, r) = -(d+L) f_0(r) \exp[-\theta(z)]. \quad (22)$$

在我们所研究的 HGL-84 型横流电激励 CO_2 激光器中, 气体压力为 90 Torr 以上, 介质的增益系数 G 可表示为:

$$G = \frac{G_0}{1+I/I_s}, \quad (23)$$

式中, I 为光强, I_s 为饱和光强, G_0 为小信号增益系数。

为了便于分析, 我们将共振腔内划分为 I 和 II 两个区域。由图 1 可见, 在区域 II 内, 有平面波 $f(z, r)$ 和球面波 $g(z, r)$ 共存, 区域 I 内仅有平面波 $f(z, r)$ 。显然, I 区和 II 区内振荡光强可分别表示为:

$$\begin{cases} I_1(z, r) = f^2(z, r), \\ I_2(z, r) = f^2(z, r) + \frac{1}{z^2} g^2(z, r). \end{cases} \quad (24)$$

$$I_2(z, r) = f^2(z, r) + \frac{1}{z^2} g^2(z, r). \quad (25)$$

考虑到(12), (23)和(24)式, 区域 I 内的振荡光强可表示为:

$$\frac{\partial I_1(z, r)}{\partial z} = \frac{I_1(z, r) G_0}{1 + \frac{I_0(z, r)}{I_s}}. \quad (26)$$

解此方程, 即可得到正支共焦非稳腔出射截面上的光强, 进而求得激光输出功率。但方程(26)必须在给定 I 区和 II 区交界面上的边界条件方能求解。为此, 必须首先求解区域 II 内的平面波振幅函数 $f(z, r)$ 。

区域 II 内的方程可由(12), (23)和(25)式得到:

$$\frac{\partial f(z, r)}{\partial z} = \frac{1}{2} G_0 \left[1 + \frac{f^2(z, r) + z^{-2} g^2(z, r)}{I_s} \right]^{-1} \cdot f(z, r). \quad (27)$$

在旁轴近似条件下, 令 $\xi = \frac{z}{L}$, 考虑到 $\frac{z}{L+d} = \frac{z}{L} \left(1 - \frac{1}{M} \right)$, 则上式可进一步改写为:

$$\frac{d\theta(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2} G_0 L / \left\{ 1 + \frac{f_0^2}{I_s} \left[e^{2\theta(\xi)} + \frac{1}{\xi^2 \left(1 - \frac{1}{M}\right)^2} e^{-2\theta(\xi)} \right] \right\}. \quad (28)$$

上式为一含有待定常数 f_0 的一阶微分方程, 需要有两个边界条件(16)和(21)式方能求解。参量变换后的(26)式可变为:

$$\frac{\partial I_1(\xi, r)}{\partial \xi} = I_1(\xi, r) \cdot L \cdot G_0 / \left[1 + \frac{I_1(\xi, r)}{I_s} \right]. \quad (29)$$

记 $J_1 = I_1/I_s$, 则上式变为:

$$\frac{\partial J_1(\xi, r)}{\partial \xi} = J_1(\xi, r) \frac{G_0 L}{1 + J_1(\xi, r)}. \quad (30)$$

方程(30)的边界条件, 可由方程(28)的解通过(16)式的变换后以 $f(z, r)$ 的形式所给出。当方程(30)的解 $J_1(\xi, r)$ 求得后, 则正支共焦非稳腔的输出功率方程如下:

$$P_{\text{out}} = 2\pi I_s \int_{a_2}^{Ma_2} dr \cdot r \cdot J_1\left(\xi = \frac{d}{L}, r\right). \quad (31)$$

三、计算方法及结果

求解正支共焦非稳腔输出功率方程(31)的关键是求解方程(28)。而方程(28)是一个非线性程度很高的一阶非线性常微分方程, 难于求得解析解。我们采用了四阶龙格-库塔法进行了数值计算, 并且在计算之前, 首先采用计算机搜索的方法, 算出一系列 f_0 下的 $\theta(z_2/L)$, 使之逼近 $\frac{1}{2} \ln(M)$, 当达到预先给定的精度时, 便找到了待定常数 f_0 , 进而求解方程(28)可以得到 $\theta(\xi)$, 对已求得的 $\theta(\xi)$ 作方程(16)的变换, 使之变成函数 $f(z)$, 即可对输出功率方程(31)进行数值计算。

从图 1 中可以看出, 在区域 I 和 II 内, 当 $\xi \leq z_1/L$ 或 $\xi \geq z_2/L$ 时, 媒质的增益为零, 且当 $a_2 \leq r \leq r_1 = a_2 \cdot \frac{z_1}{L} (M-1)$ 时, 有:

$$J_1(\xi = d/L, r) = J_1(\xi, r) = [f_0 e^{\theta(\xi)}]^2 / I_s = M f_0^2 / I_s. \quad (32)$$

当 $Ma_2 \geq r \geq r_2 = a_2 \cdot \frac{z_2}{L} (M-1)$ 时, 有

$$J_1(\xi = d/L, r) = J_1(z_1/L, r_2). \quad (33)$$

考虑到上述条件, 方程(31)可最后改写为:

$$\begin{aligned} P_{\text{out}} &= 2\pi I_s \left[\int_{a_2}^{r_1} + \int_{r_1}^{r_2} + \int_{r_2}^{Ma_2} \right] dr \cdot r \cdot J_1(\xi = d/L, r) \\ &= 2\pi I_s \left[\frac{r_1^2 - a_2^2}{2} M f_0^2 / I_s + \int_{r_1}^{r_2} dr \cdot r \cdot J_1(\xi = d/L, r) + \frac{(Ma_2)^2 - r_2^2}{2} J_1(z_1/L, r_2) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

用复化率普生公式对方程(34)中的积分项在 $r \in [r_1, r_2]$ 区间进行数值积分, 就可以对任意正支共焦非稳腔输出功率和效率进行数值计算。图 2 是对应于 HGL-84 型横流电激励

CO₂ 激光器, 在腔长 2 m, 输出耦合镜孔径 $a_2=25$ mm, $M=1.67, 1.4$ 两种正支共焦非稳腔结构中, 对应于图 3 所示的平均增益分布规律, 利用方程 (34) 所得的两种实验非稳腔的输出特性理论计算曲线。

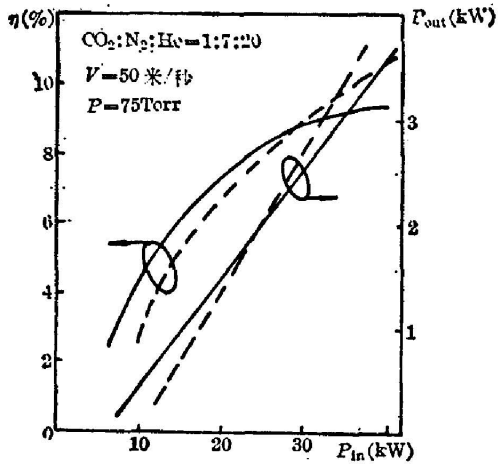


图 2 实验非稳腔输出特性的理论计算曲线
(实线: $M=1.67$; 虚线: $M=1.4$)

Fig. 2 Theoretical curves of the output characteristics of the unstable confocal resonator used in experiments (lines: $M=1.67$; dots: $M=1.4$)

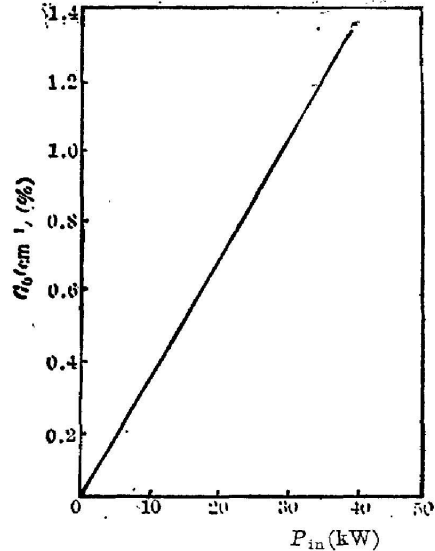


图 3 HGL-84 型 CO₂ 激光器小信号增益 G_0 与注入功率的关系

Fig. 3 Small signal gain G_0 versus input power P_{in} of a model HGL-84 CO₂ laser

四、理论与实验数据的比较

采用图 4 所示共焦非稳腔结构, 在 HGL-84 型横向流动 CO₂ 激光器中进行了输出特性的实验研究。实验腔典型的光腔参量选择为:

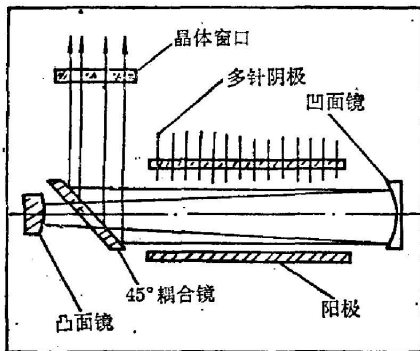


图 4 实验正支共焦非稳腔结构示意图
Fig. 4 Schematic diagram of the confocal unstable resonator

腔长 $L=2$ m, 45° 耦合输出镜内孔直径 $d_2=25$ mm, 凸面镜和凹面镜曲率半径 R_2 和 R_1 的选择, 满足 $R_1 - R_2 = 2L$ 的共焦条件, 且使得其几何放大率 $M = R_1/R_2$, 满足该腔等效菲涅耳数: $N_{eq} = \frac{M-1}{2} \cdot \frac{a_2^2}{\lambda L}$ 为半奇数条件, 有利于横模的选择^[2]。

图 5(a)、(b) 分别为 $M=1.4, M=1.67$ 正支共焦非稳腔在气体流速 50 m/sec, 工作气体压力 90 Torr, 气体混合比 CO₂:N₂:He=1:7:20 条件下, 实验腔输出功率和效率的实验数据与理论计算曲线的比较。

由图 5 可以看出, 利用方程 (34) 计算正支共焦非稳腔的输出特性, 能与实验结果较好地吻合。可见用分区积分方法所推导出的正支共焦非稳腔输出功率方程 (31) 具有理论和实用价值, 特别是对光腔参量的合理选择, 提供了可以信赖的数学依据。

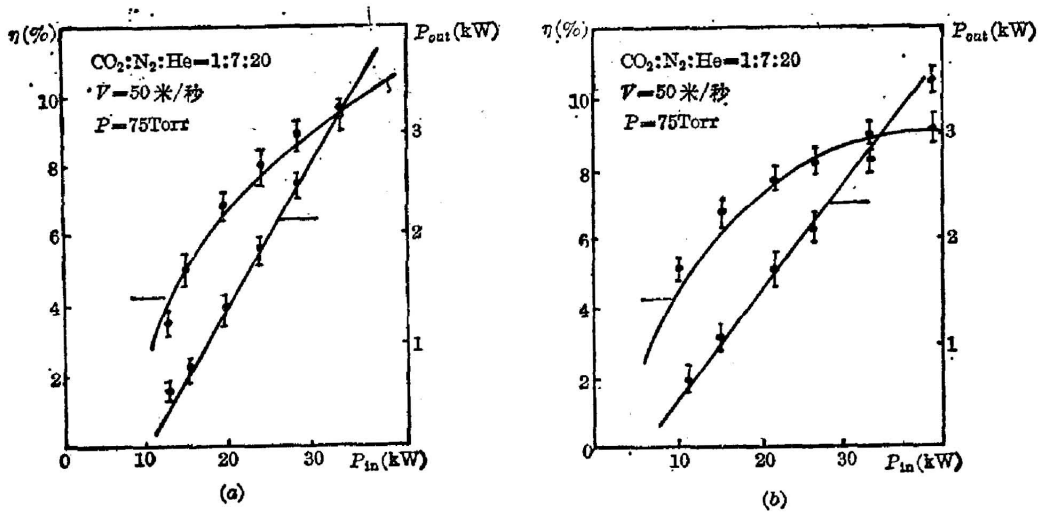


图5 共焦非稳腔输出特性实验数据与理论计算曲线的比较

(实线: 理论计算曲线; 点: 实验数据)

Fig. 5 Theoretical (lines) and experimental (dots) output characteristics of the confocal unstable resonator

(a) $M=1.4$; (b) $M=1.67$

参 考 文 献

- [1] 周炳琨等;《激光原理》, (国防科技出版社, 1980), 158.
 [2] W. H. Steier; "Laser handbook", 3, (Washington, 1979), 8.

Output power equation and numerical integrating method of a positive-branch unstable confocal resonator

CHENG ZUHAI AND LI ZAIGUANG

(Laser Institute, Huashong University of Science and Technology)

HE XUHUI

(Department of Physics, National Defence University of Science and Technology, Wu Han)

(Received 30 April 1985)

Abstract

The output power equation of a positive-branch unstable confocal resonator was deduced by using the numerical integrating method and dividing the resonator to two regions. The numerical results of this equation are in good agreement with experimental data.