

具有侧反射面的光学谐振腔*

方 洪 烈

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

平板固体激光器由于它的光路具有某种程度的位相共轭性质而可以减小热光路畸变。它是一种好的激光器结构。同样地,侧面抛光的棒状工作物质也具有类似的特性。从腔的角度来看它包含有一个“侧反射面”。本文对这种腔的模式进行了分析。分析结果表明,此种腔的衍射损失减小了,而场分布变得尖锐了。

一、引 言

面泵浦的平板状工作物质激光器(也称为 Slab lasers)由于全内反射光路的存在使它具有一种“内禀位相共轭性质”^[1],从而它可以减小光路的热畸变^[2]和应力等引起的对光路的影响^[3]。如果用棒状工作物质代替平板状的,而将棒的侧面抛光时同样存在一种内禀位相共轭性质^[4,4]。由于侧面抛光的结果出现了一个侧反射面。因此这种激光器的谐振腔是一个十分特殊的腔。它除通常的两个反射镜外还存在一个侧反射面。这种腔具有什么样的模式?这是本文关心的问题。对于这一问题的严格分析不难用数值方法求得某些结果,但我们更喜欢那些近似的解析解。因为这种解能说明更多的问题。

二、积分方程

由于侧反射面的存在,这样的腔是一个十分复杂的问题。为了较好地解决这一问题,第一步先解决一个简单情况,以后再逐步去解决那些更复杂的情况。

1. 几点假设

- (1) 假定抛光棒的直径为 $2a$, 棒长为 $2l$;
- (2) 假定谐振腔反射镜为两个平面镜,其半径为 $2a$,腔长为 $2L \gg 6l$,对称放置;
- (3) 为了简化讨论只考虑一个二维问题,这实际上是一个平板激光器中一个坐标方向的情况;
- (4) 侧反射面的反射场严格说来应该用克希霍夫积分来计算。为了简使用几何光路来代替克希霍夫积分;
- (5) 腔的费涅耳数 $N = a^2/(2\lambda L)$ 足够大以保证准几何近似适用,同时 $a \ll L$;

收稿日期: 1985年3月7日; 收到修改稿日期: 1985年5月10日

* 本工作受国家科委和杭州大学支持。

(6) 激光棒的长度 $2l$ 比棒的直径 $2a$ 大, 因此对 z 的积分也可采用准几何近似。

在这样的假设下, 一个腔镜上的场由三个部分组成(见图 1): 即由对面反射镜直接来的场; 由上侧面反射来的场以及下侧面反射来的场。由于 $L \gg 3l$, 侧反射面的反射场只有一次反射的场才有贡献, 两次以上的反射场不落在腔镜上。

2. 腔的本征方程

在谐振腔内反射镜 M_1 上的场 $A(x)$ 传播到反射镜 M_2 时, M_2 上的场 $U(x)$ 可由如下积分求得^[5]

$$U(x) = \int_{-a}^a K(x, x') A(x') dx', \quad (1)$$

其中积分核

$$K(x, x') = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\lambda L}} \exp(-ik\rho) \quad (2)$$

对坐标 x, x' 是对称的, ρ 是场 $U(x)$ 中 x 点至场 $A(x')$ 中 x' 点的光程。前面已经指出, 场 $U(x)$ 由三个部分组成。对直接传播的场 $U_1(x)$ 来说,

$$\rho \approx 2L + \frac{1}{4L} (x-x')^2. \quad (3)$$

这里已经使用了平行平面腔的假设。故

$$U_1(x) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\lambda L}} \exp(-i2kL) \int_{-a}^a \exp\left[-i\frac{k}{4L} (x-x')^2\right] A(x') dx'. \quad (4)$$

由镜 M_1 上 x' 点发出并经上侧反射面上 z 点反射至镜 M_2 上 x 点的光线按反射定律有如下关系:

$$(a-x')/(L-z) = (a-x)/(L+z). \quad (5)$$

当考虑到 $z/L \ll 1$ 并略去高阶小项时有

$$x' = x + (2az/L) - (2xz/L), \quad (6)$$

那么从 x 点到 x' 点的光程 ρ 为

$$\rho \approx 2L + (z^2/L) + (x-a)^2/L. \quad (7)$$

其反射场为

$$U_2(x) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\lambda L}} \exp(-i2kL) \exp\left[-i\frac{k}{L} (x-a)^2\right] \times \int_{-l}^l \exp\left(-i\frac{k}{L} z^2\right) A\left(x + \frac{2a}{L}z - \frac{2x}{L}z\right) dz. \quad (8)$$

如果考虑到 $2az/L$ 是一个小量时, 上式中 $A[x + (2a/L)z - (2x/L)z]$ 项可用它的泰勒级数中的前两项来近似代替。那么有:

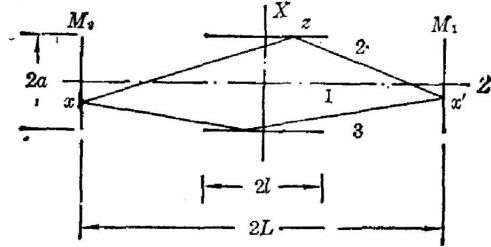


图 1 反射场的三个组成部分
Fig. 1 Three portions of the reflected field

$$\begin{aligned}
 U_2(x) = & \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\lambda L}} \exp(-i2kL) \exp\left[-i\frac{k}{L}(x-a)^2\right] \\
 & \times \left\{ A(x) \int_{-l}^l \exp\left(-i\frac{k}{L}z^2\right) dz \right. \\
 & \left. + \frac{dA(x)}{dx} \frac{2(a-x)}{L} \int_{-l}^l z \exp\left(-i\frac{k}{L}z^2\right) dz \right\}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

上式中右端第二项是一个奇函数,在对称区间的积分为零。第一项按第(6)点假设有^[6]

$$\int_{-l}^l \exp\left(-i\frac{k}{L}z^2\right) dz \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\frac{k}{L}z^2\right) dz = \frac{\sqrt{i}}{4} \sqrt{\frac{\lambda L}{2}}. \quad (10)$$

于是

$$U_2(x) = \frac{i}{8} \exp(-i2kL) \exp\left[-i\frac{k}{L}(x-a)^2\right] A(x). \quad (11)$$

按同样的步骤不难求得由下侧反射面的反射场为

$$U_3(x) = \frac{i}{8} \exp(-i2kL) \exp\left[-i\frac{k}{L}(x+a)^2\right] A(x). \quad (12)$$

总场 $U(x)$ 为 U_1, U_2, U_3 之和。因此不难建立起一个完整的积分方程:

$$\begin{aligned}
 \gamma U(x) = & \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2\lambda L}} \exp(-i2kL) \left\{ \int_{-a}^a \exp\left[-i\frac{k}{4L}(x-x')^2\right] U(x') dx' \right. \\
 & \left. + \frac{\sqrt{i\lambda L}}{2\sqrt{2}} \exp\left[-i\frac{k}{L}(x^2+a^2)\right] \cos\left(\frac{k}{L}2ax\right) U(x) \right\}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

如果引入腔的费涅耳数表示

$$N = a^2 / (2\lambda L), \quad (14)$$

而且 x 的单位取为 a , 那么方程(13)可写为

$$\begin{aligned}
 \gamma U(x) = & \sqrt{N} \exp(-i2kL) \left\{ \sqrt{i} \int_{-1}^1 \exp[-i\pi N(x-x')^2] \right. \\
 & \left. \times U(x') dx' + \frac{i}{4\sqrt{N}} \exp[-i4\pi N(x^2+1)] \cos(8\pi Nx) U(x) \right\}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

这就是具有侧反射面的谐振腔的积分本征方程。

三、微 扰 解

积分方程(15)普遍求解是困难的。但考虑到由侧反射面来的反射场贡献很小时,其右端第二项可视为微扰,用微扰论求解是方便的。无扰的方程(15)是一个二维平行平面腔的方程。它的解是已知的。本征函数 $U(x) = u_m(x)$ ^[5]

$$\begin{aligned}
 u_m(x) = & \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left[\frac{m\pi x}{2a} \left(1 + \frac{i-1}{\sqrt{\pi C}}\right)\right], & m=1, 3, 5, \dots \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left[\frac{m\pi x}{2a} \left(1 + \frac{i-1}{\sqrt{\pi C}}\right)\right], & m=2, 4, 6, \dots \end{cases} \\
 \doteq & \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{m\pi x}{2a}\right), & m=1, 3, 5, \dots \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{m\pi x}{2a}\right), & m=2, 4, 6, \dots \end{cases}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

本征值 $\gamma = b_m$ 为

$$b_m = \exp(-i2kL) \exp[-i2\pi(q_m - ip_m)], \quad (17)$$

其中

$$C = 2\pi N, \quad q_m = -\frac{\pi m^2}{16C}, \quad p_m = \frac{\sqrt{\pi} m^2}{8\sqrt{C^3}}. \quad (18)$$

方程(15)对于 $m=1$ 的模(主模)精确至一级的本征值为

$$\gamma_1 = b_1 + F_{11}, \quad (19)$$

其中

$$F_{11} = \frac{i}{4} \exp(-i2kL - i4\pi N) \int dx \exp(-i4\pi N x^2) \cos(8\pi N x) u_1^2(x). \quad (20)$$

(20)式中的积分是在无穷限上的积分,同时上式中已用了 $a=1$ 这一条件。如果注意如下几个积分^[7]

$$\int_0^\infty \sin ax^2 \cos 2bx dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left(\cos \frac{b^2}{a} - \sin \frac{b^2}{a} \right),$$

$$\int_0^\infty \cos ax^2 \cos 2bx dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left(\cos \frac{b^2}{a} - \sin \frac{b^2}{a} \right),$$

$$\int_0^\infty \sin ax^2 \sin 2bx \sin 2cx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \sin \frac{2bc}{a^2} \cos \left(\frac{b^2 + c^2}{a^2} - \frac{\pi}{4} \right),$$

不难求得

$$F_{11} = -\frac{i}{4} \exp(-i2kL) \exp\left(i\frac{\pi}{16N}\right) \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{32N}\right)\right] \sin\left(\frac{\pi}{32N}\right). \quad (21)$$

那么本征值 γ_1 为

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & \exp(-i2kL) \exp\left(i\frac{\pi}{16N}\right) \left\{ \exp\left(-\frac{1}{8\sqrt{2}N^3}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{32N}\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{32N}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{32N}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

它的模量平方为

$$\begin{aligned} |\gamma_1|^2 = & \exp\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}N^3}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{8\sqrt{2}N^3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{32N}\right) \\ & \times \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{32N}\right) + \frac{1}{16} \sin^2\left(\frac{\pi}{32N}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

由此我们看到本征值的模量平方与平面腔的相比变大了。这意味着它的衍射损失变小了。衍射损失为

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & 1 - |\gamma_1|^2 = \frac{1}{4\sqrt{2}N^3} - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{8\sqrt{2}N^3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{32N}\right) \\ & \times \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{32N}\right) - \frac{1}{16} \sin^2\left(\frac{\pi}{32N}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

衍射损失变小是可以理解的。这是因为无侧反射面腔某些逸出腔外的能量,在有侧反射面时被反射回腔内的结果。故衍射损失变小了。

精确至一级的微扰波函数,对于主模来说,只有 $m=3$ 的高价模的扰动是重要的。此时

$$U_1(x) = u_1(x) + a_3 u_3(x), \quad (25)$$

其中

$$a_3 = F_{31} / (b_1 - b_3) \quad (26)$$

按微扰论有:

$$\begin{aligned} F_{13} &= \frac{i}{4} \exp(-i2kL - i4\pi N) \int dx \exp(-i4N\pi x^2) \\ &\quad \times \cos(8\pi Nx) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \\ &= -\frac{i}{4\sqrt{N}} \exp(-i2kL) \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{32N}\right)\right] \sin\left(\frac{3\pi}{16N}\right), \end{aligned} \quad (27)$$

那么

$$a_3 = -\frac{i}{4\sqrt{N}} \frac{\exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{32N}\right)\right] \sin\left(\frac{3\pi}{16N}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{8\sqrt{2}N^3}\right) \left[1 - \exp\left(i\frac{\pi}{4N}\right) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}N^3}\right)\right]}. \quad (28)$$

由(28)式不难看出它具有一个正的实部,因此 $m=3$ 的模对主模的扰动是

$$\begin{aligned} U_1(x) &\doteq u_1(x) + |a_3| u_3(x) \\ &\doteq \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + |a_3| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

因此,扰动后的模场分布,中心区更高。这意味着镜面边缘处的场相对说来变弱了。这一点意味着它的衍射损失应该减小。这与前面的结果是一致的。

此外,由(22)式可知,本征值的相角变了。也就是说具有侧反射面的腔的共振频率也发生了变化。由(29)式可知,扰动后的模的角分布变宽了。

四、讨 论

本文对二维问题的讨论结果不难推广至矩形棒的情况。对圆形棒的情况以及球面反射镜的情况正在进行工作。

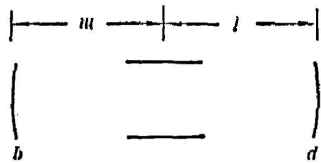


图2 具侧反射面的谐振腔

Fig. 2 Resonators with side reflectors

此外,本文讨论的是对称结构,即棒处于中心位置的情况。如果棒靠近某一反射镜时,情况变得复杂。但应当指出的是:此种非对称结构不具有准位相共轭性质。为看出这一点,我们来考察一个如图2所示的

腔。它的变换矩阵 D 为

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+q(l-m) & q(l-m)^2 \\ -(p+q)-pq(l-m) & -pq(l-m)^2 - q(l-m) + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

它的迹为

$$S_p(D) = 2 - pq(l-m)^2.$$

因此只有当 $l=m$ 时腔才具有准位相共轭性质。

王绍民同志为本工作提供了很多有价值的论文;应成仁、朱精敏等同志介绍了他们有关

抛光棒激光器的实验结果以及其它有关的资料。在此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] Wang Shaomin (王绍民), H. Weber; "Intrinsic Phase-Conjugate Properties of Slab Lasers", (to be Published).
- [2] J. M. Eggleston, et al.; *Opt. Lett.*, 1982, **7**, No. 9 (Sep), 405.
- [3] J. M. Eggleston, et al.; *IEEE Quant. Electron.*, 1984, **QE-20**, No. 3 (Mar), 289.
- [4] 应成仁等; "抛光棒形固体激光器的初步实验研究", 1983, 位相共轭光学成果报告会报告, 杭州。
- [5] 方洪烈; 《光学谐振腔理论》, (科学出版社, 北京, 1981), 97; 104.
- [6] W. Gantschi; 《Handbook of Mathematical Functions》, (Ed. M. Abramowitz, I. A. Stegun, Dover Pub. Inc., New York, 1980), 301.
- [7] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik; 《Table of Integrals, Series, and Products》, (Academic Press, New York, 1980), 395.

Resonators with side reflectors

FANG HONGLIE

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 7 March 1985; revised 10 May 1985)

Abstract

A slab laser can reduce the effect of thermal-optical distortions due to its intrinsic phase-conjugate properties. It is hence a good laser structure. A rod laser with its side surface polished has similar properties, because it has a special kind of resonator with side reflectors. Modes of such resonator are analyzed in this paper. The analytic results show that diffraction losses become smaller, and mode distributions become stronger in the central part of the end reflectors.