

积分球理论的级数收敛法

李芳 叶光荣
(浙江大学光仪系)

提 要

本文从积分球内分光的多次反射原理出发,用级数收敛法得到了用积分球进行光度色度测量时替代法和比较法二类方法所存在的非线性误差,并给出误差校正公式,最后提出积分球参数的设计原则。

一、引 言

积分球在光度色度仪器中应用很广泛,例如测量材料的透射比、反射比、辐亮度系数等。如何正确设计和使用积分球,发挥其最大效率,减少设计误差是设计者共同关心的问题。

早在50年代 Moon^[1]就对腔内光的多次反射问题进行过探讨,并归结为解一个 Fredholm 型积分方程。继后, Jucquez 和 Kuppenheim^[2]用复杂的积分核分析法对无挡屏的积分球作了理论分析。还有许多文章则是介绍用积分球进行测量的方法^[3]。

用积分球进行光度色度测量,不管其具体测量方法如何,大体可归纳为两大类:

(1) 替代法(单光束法): 测量时,待测试样和标准板先后放在同一测量孔上,由入射光照射,如图1(a)所示。

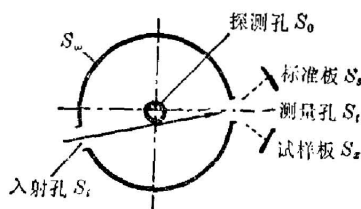


图1(a) 替代法

Fig. 1(a) Substitution method

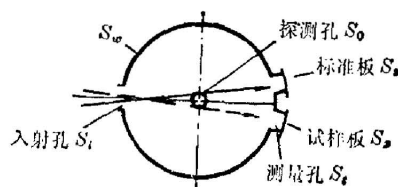


图1(b) 比较法

Fig. 1(b) Comparison method

(2) 比较法(双光束法): 测量时,待测试样和标准板同时放在对称的二个测量孔上,入射光先后照射它们,如图1(b)所示。

由已知的标准板的漫反射比及二次测量时探测器孔上的响应即可求得待测试样的漫反射比,用类似方法也可用积分球测量材料的透射比、辐亮度系数等^[3]。

本文先简述理想积分球内光的多次反射特性。然后,对非理想积分球,就替代法、比较法两种使用情况用简单的级数收敛法求得测量误差,计算结果与 Jacquez^[2]的结果一致。此外,文中还给出误差校正公式,分析了镜面反射试样的极限误差以及挡屏误差,最后提出积分球参数的设计原则。

收稿日期: 1984年5月26日; 收到修改稿日期: 1984年8月6日

二、理想积分球

具有完整规则的球形及均匀的中性漫反射涂层的积分球称为理想积分球(球内无任何吸收及散射介质)。

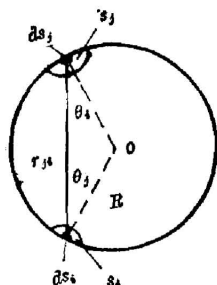


图2 理想积分球
Fig. 2 Perfect
integrating sphere

设球中心放置一个各向同性的点光源,发出光通量为 ϕ_0 ,如图2所示。球壁上任一点上的照度是由直接照射及以后多次反射所形成。直射照度为 $E_0 = \phi_0/s$,式中 s 为积分球面积。由直接光照明的球壁成为次光源,由光能传播定律,球壁间下一次的反射所产生的照度应为

$$E_i = \frac{\phi_{ji}}{s_i} = \frac{1}{s_i} \int_{s_i} \int_{s_j} \frac{L \cos \theta_i \cos \theta_j}{\gamma_{ji}^2} \quad (1)$$

式中, ds_i 、 ds_j 为球壁上任意二微小面元的面积; θ_i 、 θ_j 为二面元法线和二面元连线之夹角; γ_{ji} 为二面元的连线长度; L 为该次反射前的球壁亮度。对于完全漫射球壁, $L = (M/\pi) = (\rho E/\pi)$,式中 M 为球壁的面发光度; ρ 为球壁漫反射比。因积分在整个球壁进行,故

$$E_1 = \frac{Ls}{4R^2} = \rho E_0 = \frac{\rho \phi_0}{s} \quad (2)$$

同理,可得到以后各次反射在球壁上产生的照度,则球壁最终照度为

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots = \frac{\phi_0}{s} + \frac{\rho \phi_0}{s} + \frac{\rho^2 \phi_0}{s} + \dots = \frac{\phi_0}{s} \frac{1}{1-\rho} \quad (3)$$

若挡去直射光,则球壁最终照度为

$$E = \frac{\phi_0}{s} = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (4)$$

(3)式和(4)式为理想积分球球壁照度的计算公式^[4]。

三、非理想积分球

实际上,实用的积分球并非理想,其偏离理想球因素甚多,诸如由于测量需要球壁上开各种孔(入射孔、试样孔、标准板孔和探测器孔),积分球内安放挡屏等,至于有关球壁非中性反射影响将另作文章专门讨论;空气与灰尘散射影响将可在测量公式中消去。故在以下讨论中将排除这两者的影响。

设非理想球总面积为 s ,照明光束定向射入球内的起始光通量为 ϕ_0 ,积分球具有的开口,如表1所示。以下就两大类方法分别加以讨论。

1. 替代法

(1) 球形漫射的试样和标准板

设试样和标准均为球形,两者表面均为完全漫反射。先将试样放在测量孔上,由入射光照明,球内各次反射所形成的照度如表2所示。于是得到放在探测孔上的试样总照度为

表 1 积分球的开孔
Table 1 Sphere apertures

球壁开孔 特 性	入 射 孔	测 量 孔		探 测 孔	剩 余 球 壁
		试 样 孔	标 准 板 孔		
孔面积	\bar{s}_i	\bar{s}_x	\bar{s}_s	\bar{s}_0	
对应的球壁面积	s_i	s_x	s_s	s_0	s_w
漫反射比	$\rho_i \approx 0$	ρ_x	ρ_s	ρ_0	ρ_w

表 2 带球形漫射试样和标准板的积分球内的多次反射

Table 2 Multiple reflections in the sphere with spherical diffusive sample and standard

反射次序	参加反射的光通量	试样上照度	探测孔上照度
第 0 次	ϕ_0	ϕ_0/s_x	0
第 1 次	$\phi_0 \rho_x$	$\phi_0 \rho_x / s$	$(\phi_0 \rho_x / s) = E_1$
第 2 次	$E_1 s_x \rho_x + E_1 s_0 \rho_0 + E_1 s_w \rho_w$	$E_1 \left(\frac{s_x}{s} \rho_x + \frac{s_0}{s} \rho_0 + \frac{s_w}{s} \rho_w \right)$	$E_1 \left(\frac{s_x}{s} \rho_x + \frac{s_0}{s} \rho_0 + \frac{s_w}{s} \rho_w \right) = E_2$
⋮	⋮	⋮	⋮
第 n 次	$E_{n-1} s_x \rho_x + E_{n-1} s_0 \rho_0 + E_{n-1} s_w \rho_w$	$E_{n-1} \left(\frac{s_x}{s} \rho_x + \frac{s_0}{s} \rho_0 + \frac{s_w}{s} \rho_w \right)$	$E_{n-1} \left(\frac{s_x}{s} \rho_x + \frac{s_0}{s} \rho_0 + \frac{s_w}{s} \rho_w \right) = E_n$
⋮	⋮	⋮	⋮

* 表中 $E_1 E_2 \dots E_n \dots$ 分别是球内光通量各次反射在探测孔位置上形成的照度, 以上表格类同。

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_1 + K_x (E_1 + E_2 + \dots + E_{n-1} + \dots) = \frac{\phi_0 \rho_x}{s} \frac{1}{1 - K_x}, \\ K_x &= \frac{s_x}{s} \rho_x + \frac{s_0}{s} \rho_0 + \frac{s_w}{s} \rho_w. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

同理, 将标准板放在测量孔上时, 得探测孔上总照度为

$$E_s = \frac{\phi_0 \rho}{s} \frac{1}{1 - K_s}, \quad K_s = \left(\frac{s_s}{s} \right) \rho_s + \left(\frac{s_0}{s} \right) \rho_0 + \left(\frac{s_w}{s} \right) \rho_w. \quad (6)$$

与(3)式比较可知, K_x 、 K_s 分别为测量试样与标准板时的积分球有效反射比。

若探测器响应 R 与探测孔上总照度 E 成正比, 即 $R_x \propto E_x$, $R_s \propto E_s$; 二次测量时试样与标准是放在同一测量孔上, 即 $s_x = s_s = s_t$ (以下类同), 则试样的漫反射比为

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= \frac{R_x}{R_s} \rho_s \left(1 - \frac{K_s - K_x}{1 - K_s} \right) = \frac{R_x}{R_s} \rho_s (1 + \alpha), \\ \alpha &= \frac{(\rho_s - \rho_x) (s_t / s)}{1 - [(s_x / s) \rho_s + (s_0 / s) \rho_0 + (s_w / s) \rho_w]}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 α 代表误差项。为了减少误差, 积分球设计时应考虑:

(i) 减少测量孔尺寸。图 3 实线所示为替代法开孔误差曲线。

(ii) 减少二次测量时积分球有效反射比之差异, 即减少标准板与试样的漫反射比的差异。当二者的反射比相同时, 替代法测量误差为零。

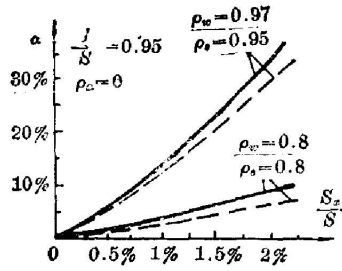


图 3 替代法的误差曲线
Fig. 3 Error of substitution method

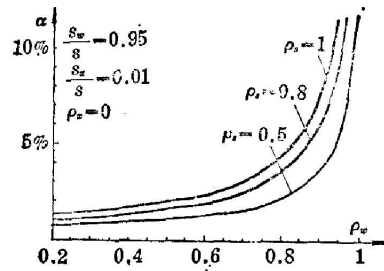


图 4 球壁漫反射比 ρ_w 对误差的影响
Fig. 4 The effect of ρ_w on error

(iii) 适当降低球壁漫反射比 ρ_w , 如图 4 所示。在相同误差情况下, 宁可增大探测器面积而不应增加剩余球壁面积。一般因 $(s_0/s) \ll (s_w/s)$ 、 $\rho_0 \ll \rho_w$, 以下为计算简化, 均略去 $(s_0/s)\rho_0$ 项。

(iv) 积分球有效反射比降低也将使积分球效率降低。(5)式可写成 $E_s = \phi_0 \rho_s \eta / s$, 式中效率 $\eta = 1/(1 - K_s)$ 。很明显, 球越小、 K_s 越大, 则效率越大, 相同光通量入射时, 输出响应也越大。

(v) 计算时可用校正公式

$$\rho_x = \frac{R_x}{R_s} \rho_s \frac{1}{1 - [s_t / (s - s_w \rho_w)] [\rho_s - (R_x / R_s) \rho_s]} \quad (8)$$

(2) 平面形漫射的试样和标准板

实际测量时一般用平面形漫射试样和标准。此时, 因为试样与标准是平面, 由它们反射的光不能照到自身, 但一个面对另一个面元产生的照度仍可由(1)式表达。

可以证明平面形漫射板与对应的球形漫射面在球壁上形成的照度是一样的, 如图 5 所示。

据此, 当平面试样放在测量孔上并被入射光照明时, 各次反射形成的照度如表 3 所示。于是得到试样总照度为

$$E_x = \frac{\phi_0 \rho_x}{s - s_x} \frac{1}{1 - K_x}, \quad K_x = \frac{s_w}{s} \rho_w \frac{s_x}{s - s_x} \rho_x + \frac{s_w}{s} \rho_w \quad (9)$$

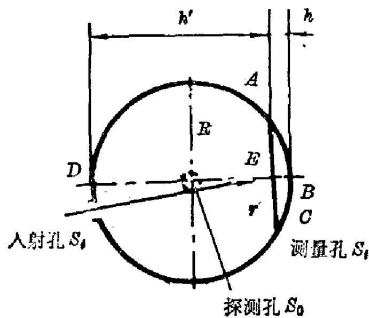


图 5 带平面漫射试样和标准板的积分球

Fig. 5 The sphere with flat diffusive sample and standard

同样, 换以标准板代之则得标准板上的总照度为

$$E_s = \frac{\phi_0 \rho_s}{s - s_s} \frac{1}{1 - K_s}, \quad K_s = \frac{s_w}{s} \rho_w \frac{s_s}{s - s_s} \rho_s + \frac{s_w}{s} \rho_w \quad (10)$$

$$\rho_x = \frac{R_x}{R_s} \rho_s \left[1 + \frac{K_s - K_x}{1 - K_s} \right] = \frac{R_x}{R_s} \rho_s \left[1 + \frac{(\rho_s - \rho_x) (s_w/s) \rho_w [s_t / (s - s_t)]}{1 - \{ (s_w/s) \rho_w [s_t / (s - s_t)] \rho_s + (s_w/s) \rho_w \}} \right] \quad (11)$$

(11)式与(7)式十分相似, 误差曲线如图 3 虚线所示。当 $0.9 < (s_w/s)\rho_w < 1$ 时, 两者的误差有相同的数量级。计算表明, 由试样和标准的平面形所引起的误差和开孔误差符号相反。上节的讨论仍然成立。

表 3 带平面漫射试样和标准板的积分球内的多次反射

Table 3 Multiple reflections in the sphere with flat diffusive sample and standard

反射次序	参加反射的光通量	射在试样上的光通量	探测孔上的照度
第 0 次	ϕ_0	ϕ_0	()
第 1 次	$\phi_0 \rho_x$	0	$[\phi_0 \rho_x / (s - s_x)] = E_1$
第 2 次	$E_1 s_w \rho_w$	$E_1 s_w \rho_w s_x / s$	$E_1 (s_w / s) \rho_w = E_2$
第 3 次	$E_1 \frac{s_w}{s} \rho_w s_x \rho_x + E_2 s_m \rho_m$	$E_2 s_w \rho_w \frac{s_x}{s}$	$E_1 \frac{s_w}{s} \rho_w \frac{s_x}{s - s_x} \rho_x + E_2 \frac{s_w}{s} \rho_w = E_3$
⋮	⋮	⋮	⋮
第 n 次	$E_{n-2} \frac{s_w}{s} \rho_w s_x \rho_x + E_{n-1} s_w \rho_w$	$E_{n-1} s_w \rho_w \frac{s_x}{s}$	$E_{n-2} \frac{s_w}{s} \rho_w \frac{s_x}{s - s_x} \rho_x + E_{n-1} \frac{s_w}{s} \rho_w = E_n$
⋮	⋮	⋮	⋮

(3) 镜面反射试样和平面漫射标准板

在许多情况下，试样表面并非理想漫反射，现来计算若试样为镜面反射时产生的最大误差。

当入射光入射在镜面试样上，如图 6 所示第一次反射为定向镜面反射，让镜面反射光射在球壁上，而不允许射在探测孔上。从球壁上再次反射出来的光则是漫射的。继后的反射可以认为镜面试样是在漫射光照射下，其反射光也是漫射的。各次反射的照度见表 4。

仿前，于是有

$$\rho_x = \frac{R_x}{R_s} \rho_s \left\{ 1 + \frac{(1 - K_x) - (1 - K_s) \rho_w [(s - s_t) / s]}{(1 - K_s) \rho_w [(s - s_t) / s]} \right\}, \tag{12}$$

式中 K_x 、 K_s 分别为(9)式与(10)式所示。

与(11)式比较，当 $(s_t / s) \ll 1$ ， $0.9 < \rho_w (s_w / s) < 1$ 时，两者有相同数量级的误差(见表 5)。从表 3 和表 4 可知，此时近似有 $\rho_x = (R_x / R_s) (\rho_s / \rho_w)$ 。

(4) 挡屏误差

为避免由试样或标准直接反射对探测器的不均匀的影响，需在探测孔附近加挡屏，如图 7 所示。若设挡屏挡去由测量孔上第一次反射到探测孔的光，而忽略其它高次项的影响。

对平面漫射试样和标准板，有挡屏时

$$\rho_{x\#} = \frac{R_x}{R_s} \rho_s \left[1 + \frac{K_s - K_x}{K_x (1 - K_s)} \right], \tag{13}$$

由(11)式和(13)式可得挡屏误差为

$$\Delta\alpha = \alpha_{\#} - \alpha_x = \frac{K_s - K_x}{K_x} \frac{1 - K_x}{1 - K_s}. \tag{14}$$

同理，对镜面反射试样和平面漫射标准板，挡屏误差为

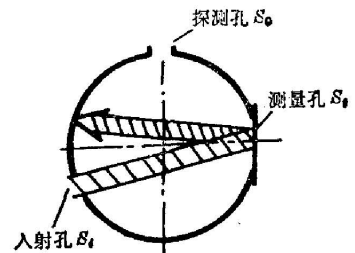


图 6 带镜面反射试样和平面漫射标准板的积分球
Fig. 6 The sphere with specular sample and flat diffusive standard

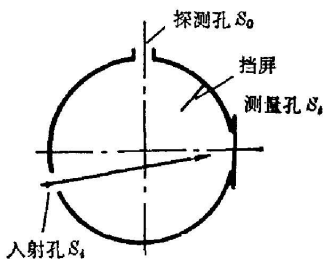


图 7 带挡屏的积分球
Fig. 7 The sphere with a screen

表 4 带镜面反射试样和平面漫射标准板的积分球内的多次反射

Table 4 Multiple reflections in the sphere with specular sample and flat diffusive standard

反射次序	参加反射的光通量	射在试样上的光通量	探 测 孔 上 的 照 度
第 0 次	ϕ_0	ϕ_0	0
第 1 次	$\phi_0 \rho_x$	0	0
第 2 次	$\phi_0 \rho_x \rho_w$	$\phi_0 \rho_x \rho_w \frac{s_x}{s}$	$\frac{\phi_0 \rho_x \rho_w}{s} = E_1$
第 3 次	$E_1 s_w \rho_w$	$E_1 s_w \rho_w \frac{s_x}{s}$	$E_1 \frac{s_w}{s} \rho_w = E_2$
第 4 次	$E_1 s_w \rho_w \frac{s_x}{s} \rho_x + E_2 s_w \rho_w$	$E_2 s_w \rho_w \frac{s_x}{s}$	$E_1 \frac{s_w}{s} \rho_w \frac{s_x}{s-s_x} \rho_x + E_2 \frac{s_w}{s} \rho_w = E_3$
⋮	⋮	⋮	⋮
第 n 次	$E_{n-3} s_w \rho_w \frac{s_x}{s} \rho_x + E_{n-2} s_w \rho_w$	$E_{n-2} s_w \rho_w \frac{s_x}{s}$	$E_{n-3} \frac{s_w}{s} \rho_w \frac{s_x}{s-s_x} \rho_x + E_{n-2} \frac{s_w}{s} \rho_w = E_n$
⋯	⋮	⋮	⋮

$$\Delta\alpha = \frac{K_x - 1}{\rho_w [(s - s_t)/s]} \quad (15)$$

计算表明,当试样漫射性较好时,挡屏误差比开孔误差要小一个数量级。而当试样为镜面反射时,无挡屏的测量误差较大,而且随着球壁反射比降低而增大;此时若球内没有挡屏,挡屏误差虽较大,但因同开孔误差符号相反,故起了降低误差的作用。

2. 比较法

用此法测量时,试样和标准板同时放在二个测量孔上,入射光照射在试样上或照射在标准板上测量时,积分球的有效反射比 K 不变。用类似上述分析方法可得到比较法的误差。

(1) 球形漫射的试样和标准板的漫反射比,仿前有

$$\rho_x = \frac{R_x}{R_s} \rho_s \quad (16)$$

可见,此时比较法测量误差为零。若调整仪器使得响应 $R_s = \rho_s$, 则 $\rho_x = R_x$ 。

(2) 平面漫射的试样和标准板

仿前,此时积分球有效反射比为

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{s_w}{s} \rho_w + \frac{s_w}{s} \rho_w \frac{s_x}{s-s_x} \rho_x + \frac{s_w}{s} \rho_w \frac{s_s}{s-s_s} \rho_s + \frac{s_x}{s-s_x} \rho_x \frac{s_s}{s-s_s} \rho_s \\ &\quad + \frac{s_w}{s} \rho_w \frac{s_x}{s-s_x} \rho_x \frac{s}{s-s_s} \rho_s, \\ \rho_x &= \frac{R_x}{R_s} \rho_s (1 + \alpha), \quad \alpha = \frac{(\rho_x - \rho_s) [s_t / (s - s_t)]}{1 + [s_t / (s - s_t)] \rho_s}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中 α 为误差项,由上式可看出:

(i) 当试样和标准是平面漫射时,比较法测量误差不再为零。

(ii) 不同测量孔的误差如图 8 所示。一般因 $(s_t/s) \ll 1$, 故测量误差和开孔面积比 (s_t/s) 近似成线性。

(iii) 当试样和标准的反射比相同时, 测量误差为零。随着二者的差异增大误差将增加。

(iv) 误差与球壁反射比无关。 ρ_w 增大将使积分球效率提高, 故应提高球壁反射比。

(v) 校正公式

$$\rho_x = \frac{R_x}{R_s} \rho_s \frac{1}{1 + [1 - (R_x/R_s)] [s_t/(s - s_t)] \rho_s} \quad (18)$$

(3) 镜面反射试样和平面漫射标准板

仿前, 于是有

$$\rho_x = \frac{R_x}{R_s} \rho_s \left\{ 1 + \frac{1 - [(s - s_t)/s] \rho_w + [s_t/(s - s_t)] \rho_x - (s_t/s) \rho_w \rho_s}{[(s - s_t)/s] \rho_w + (s_t/s) \rho_w \rho_s} \right\} \quad (19)$$

此时, 入射光经镜面试样反射、再经球壁反射才被漫射掉, 因此, 球壁漫反射比对误差影响很大, ρ_w 减小将使误差增大。近似也有:

$$\rho_x = \frac{R_x}{R_s} \frac{\rho_s}{\rho_w}$$

(4) 挡屏误差

对平面漫射试样和标准板

$$\Delta\alpha = \frac{(\rho_x - \rho_s) s_t (1 - K) / (s - s_t)}{[1 + s_t \rho_s / (s - s_t)] [K + s_t \rho_s / (s - s_t)]} \quad (20)$$

对镜面反射试样和平面漫射标准板

$$\Delta\alpha = \frac{K - 1}{(s - s_t) (\rho_w / s) + (s_t \rho_w \rho_s / s)} \quad (21)$$

上两式中的 K 同(17)式。

最后, 举例将两种方法的测量误差列于表 5 中。

表 5 两种方法的测量误差的比较

Table 5 The comparison of measurement error of two method

状 态 \ 方 法		替 代 法				比 较 法			
		$\rho_{wI}=0.97$		$\rho_{wII}=0.9$		$\rho_{wI}=0.97$		$\rho_{wII}=0.9$	
球形漫射试样与标准板		13.9%		7.0%		0		0	
平面漫射试样与标准板	无挡屏	12.5%	$\Delta\alpha=1.1\%$	5.9%	$\Delta\alpha=1.0\%$	-0.94%	$\Delta\alpha=-0.06\%$	-0.94%	$\Delta\alpha=-0.06\%$
	有挡屏	13.6%		6.9%		-1.01%		-1.09%	
镜面反射试样与标准板	无挡屏	16.7%	$\Delta\alpha=-8.1\%$	18.8%	$\Delta\alpha=-16.2\%$	3.14%	$\Delta\alpha=-7.18\%$	11.16%	$\Delta\alpha=-15.2\%$
	有挡屏	8.6%		2.6%		-4.07%		-4.05%	

* 设 $(s_x/s)=0.01$, $(s_w/s)=0.95$, $\rho_s=0.95$, $\rho_x=0$ 。

四、小 结

综上所述, 在光度色度测量中, 积分球的参数设计应考虑:

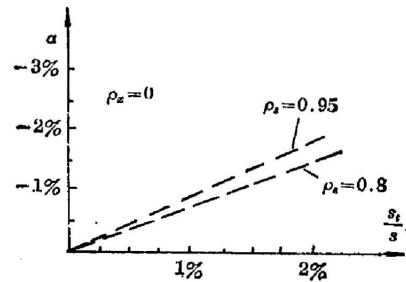


图 8 比较法的误差曲线

Fig. 8 Error of comparison method

(1) 积分球的大小主要由测量孔比(s_t/s)所决定,可根据测试面积、仪器误差要求用有关公式确定。对于给定测量面积,测量误差和输出响应随看球体增大而减少,设计时须两者兼顾。

(2) 积分球的开孔设置应满足测量要求。测量孔大小由设计要求决定,并使各种孔引起的误差满足设计要求。探测孔尽量靠近测量孔,以使挡屏尽量小。

(3) 替代法中,球壁漫反射比降低可使误差与球效率明显减小,挡屏误差略有增加,设计时球壁漫反射比选择应两者兼顾,比较法中,球壁漫反射比的变化对误差无影响,但它的降低将使球效率下降,故应取较高的反射比。

(4) 选用的标准板的漫反射比尽可能接近待测试样,以使误差尽量减小。

(5) 实际试样的测量误差可根据其表面漫射特性在完全漫射试样和镜面试样两者之间取权重决定。

(6) 相同条件下,比较法误差比替代法小,但仪器设计比较复杂。一般低精度测量用替代法,高精度测量则用比较法。

参 考 文 献

- [1] P. Moon; *J. O. S. A.*, 1940, **30**, No. 2 (Feb), 195.
- [2] J. A. Jacquez, H. F. Kuppenheim; *J. O. S. A.*, 1955, **45**, No. 5 (May), 460
- [3] H. J. Helwig, J. Krochmann; *Light Res. & Tech.*, 1971, **3**, No. 3 (Mar), 211.
- [4] 荆其诚;《色度学》, (科学出版社, 1979), 161.

Theory of integrating sphere by converging series approaches

LI FANG AND YE GUANRONG

(Department of Optical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou)

(Received 26 May 1984; revised 6 August 1984)

Abstract

From the principle of multiple reflections of light in an integrating sphere, the non-linear errors are obtained. These errors exist in the substitution or comparison method when making photometric or colorimetric measurements by converging series approaches. At the same time, the error correction formulas are found, and the designing criteria of the parameters of the integrating sphere are proposed.