

由于干涉图计算波差和传递函数

余景池

(中国科学院长春光学精密机械研究所)

提 要

本文讨论一种用于光学系统和光学反射镜面检验中的完整而定量的方法。该方法以干涉术为基础, 将所得干涉图样表示成光学系统光瞳坐标的函数和光学零件表面坐标的函数。此函数为与象差密切相关的 Zernike 圆多项式的线性组合。并利用 Gram-Schmidt 正交法求多项式的系数使其与干涉图上一些离散点相吻合。由此函数出发本文讨论了检验系统本身误差及调整误差去除的方法及计算被检波面的最小均方波差及波差分布, 进而求得系统的 PSF 和 OTF 值。

一、干涉图的函数表示

由于干涉仪得到的干涉图样在通常情况下总具有很复杂的形状, 难于用简单的一般函数来描述。但考虑到在绝大部分情况下由被检光学系统出射的波面和由光学零件表面所反射的波面总是趋于光滑和连续的, 一定可以表示成一个完备基底函数系的线性组合或一线性无关的基底函数系的组合。现选取 Zernike 圆多项式系作为基底函数。这是由于 Zernike 圆多项式系具有如下两个主要特点, 而对所讨论的问题显得特别方便^[1]:

1. 在单位圆上正交, 即有如下关系

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} U_n^l(\rho, \theta) \cdot U_m^k(\rho, \theta) \cdot \rho d\theta d\rho = \begin{cases} \frac{\pi}{n+1} \delta & (n=m, l=k), \\ 0 & (n \neq m \text{ 或 } l \neq k), \end{cases} \quad (1)$$

式中 $U_n^l(\rho, \theta)$ 、 $U_m^k(\rho, \theta)$ 为 Zernike 圆多项式。当 $l=0$ 时 $\delta=1$, 当 $l \neq 0$ 时 $\delta=0.5$ 。

由于被检光学系统和光学零件一般总具有圆形光瞳和圆形的通光孔。经规一化后为单位圆。而函数系的正交使各不同多项式的系数相互独立, 对消除偶然因素的干扰很有利。

2. 和光学设计者惯用的 Seidel 像差系数很容易建立起联系

极坐标形式的 Zernike 圆多项式的具体表达式如下:

$$U_n^l(\rho, \theta) = R_n^l(\rho) \cdot \Theta_n^l(\theta). \quad (2)$$

上式中 n 为多项式的阶数, 取值为 0, 1, 2, ...。 l 为与阶数 n 相关的序号, 其值恒与 n 同奇偶性, 且绝对值小于或等于阶数。令 (2) 式中

$$l = n - 2m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

$$R_n^{n-2m} = \begin{cases} \sum_{s=0}^m (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!(m-s)!(n-m-s)!} \rho^{n-2s} & (n-2m \geq 0), \\ R_n^{n-2m} & (n-2m < 0), \end{cases} \quad (4)$$

$$R_n^{n-2m} = R_n^{n-2m} \quad (n-2m < 0), \quad (5)$$

$$\Theta_n^{n-2m} = \begin{cases} \cos (n-2m)\theta & (n-2m \geq 0), \\ -\sin (n-2m)\theta & (n-2m < 0). \end{cases} \quad (6)$$

在基底函数系选定之后,干涉图上干涉条纹的级数分布函数 F 即有如下的形式:

$$F(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \cdot U_n^{n-2m}(\rho, \theta) = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}. \quad (7)$$

上式中 Q_k 为常系数, \mathbf{Q} 为系数 Q_k 组成的列向量, 上标 T 表示列向量的转置。 \mathbf{U} 为 Zernike 多项式项 U_k 组成的列向量。

$$k = \frac{n(n+1)}{2} + m + 1. \quad (8)$$

对于一般的光学系统,高阶像差不会太大,用七级像差来描述已具有足够的精度。而至八阶的 Zernike 多项式已包含了全部的七级像差项。由于采用最小二乘法求系数,当级数的阶数增至较多时是极不稳定的。此时的系数矩阵严重地失常,反而影响了近似的精度^[2]。

以下三种 Zernike 多项式的表达形式是等价的,用到时不另作说明了:

$$U_n^l(\rho, \theta) = U_n^{n-2m}(\rho, \theta) = U_k(\rho, \theta). \quad (9)$$

基底函数选定后,剩下的问题是如何求出(7)式中的常数 Q_k 。

通常由干涉图只能得到整数级的条纹位置,且仅在有限数量的孤立点上取得。如何由这些有限孤立的数据点求得系数向量 \mathbf{Q} 是问题的关键。这可由 Gram-Schmidt 正交法来解决^[3]。

首先利用 Gram-Schmidt 正交法求出一组在所取干涉图数据点集合上离散正交的,且为 Zernike 多项式系的线性组合的基底函数系 \mathbf{V} 。即:

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{U}, \quad (10)$$

上式中 \mathbf{C} 是元素为 C_{ij} 的方阵。 \mathbf{V} 中的每一元素均满足下方程:

$$\sum_{\sigma} V_{r_1} \cdot V_{r_2} \cdot W = \begin{cases} 0 & (r_1 \neq r_2), \\ 1 & (r_1 = r_2). \end{cases} \quad (11)$$

上式中 σ 为全体所取数据点的集合。

W 是非负权函数,其作用是使在权较大的区域内近似更为精确。一般情况取 $W=1$ 。同时也可利用权函数来消除当数据点均匀选取有困难时所引起的数据点非均匀分布的影响。

Gram-Schmidt 正交法给出 \mathbf{V} 和 \mathbf{U} 的如下关系:

$$V_i = \frac{U_i - \sum_{r=1}^{i-1} V_r \cdot \sum_{\sigma} W \cdot U_i \cdot V_r}{\left[\sum_{\sigma} W \cdot U_i^2 - \sum_{r=1}^{i-1} (\sum_{\sigma} W \cdot U_i \cdot V_r)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (12)$$

将(12)式进行变换,并结合(10)式可求得方阵 \mathbf{C} 中各元素 C_{ij} 的表达式如下:

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & (i < j), \\ \left[\sum_{\sigma} W \cdot U_i^2 - \sum_{r=1}^{i-1} (\sum_{\sigma} W \cdot U_i \cdot V_r)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} & (i = j), \\ \sum_{r=1}^{i-1} [(\sum_{\sigma} W \cdot U_i \cdot V_r) \cdot C_{ir} \cdot C_{rj}] & (i > j). \end{cases} \quad (13)$$

将(13)式代入(10)式就求得了 \mathbf{V} 。以下是如何根据干涉图数据点上的数据和 \mathbf{V} 来求出 \mathbf{Q} 。

由(7)和(11)式求得如下关系的干涉图展开式:

$$F(\rho, \theta) = Q^T \cdot U = Q^T \cdot C^{-1} \cdot V = B^T \cdot V. \quad (14)$$

上式中上标 -1 表示 C 矩阵的逆矩阵。由(14)式最后等式的二端比较得:

$$Q^T \cdot C^{-1} = B^T. \quad (15)$$

(15)式两边同时乘以 C 矩阵并转置得:

$$Q = C^T \cdot B. \quad (16)$$

(16)式中向量 B 可由已知干涉图数据点的数值, 利用最小二乘法求得。

设 $x(\rho, \theta)$ 为实际干涉图样。最小二乘法原理要求:

$$\sum_{\sigma} W \cdot \Delta^2 = \sum_{\sigma} W [x(\rho, \theta) - F(\rho, \theta)]^2 \text{ 为极小。} \quad (17)$$

将(14)式的 $F(\rho, \theta)$ 展开式代入(17)式并变换得:

$$\sum_{\sigma} W \cdot \Delta^2 = \sum_{\sigma} W \cdot \left[\sum_{i=1}^k B_i \cdot V_i \right]^2 - 2 \sum_{\sigma} W \cdot x(\rho, \theta) \cdot \sum_{i=1}^k B_i \cdot V_i + \sum_{\sigma} W \cdot [x(\rho, \theta)]^2. \quad (18)$$

由(18)式右方第一项及(11)式得出下式:

$$\sum_{\sigma} W \cdot B_n \cdot B_m \cdot V_n \cdot V_m = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n). \end{cases} \quad (19)$$

方程(18)简化为:

$$\sum_{\sigma} W \cdot \Delta^2 = \sum_{i=1}^k (B_i^2 - 2B_i \sum_{\sigma} W \cdot x \cdot V_i) + \sum_{\sigma} W \cdot x^2. \quad (20)$$

为满足(17)式的条件, 上式对 B_i 的偏导数应等于零, 即:

$$\partial(\sum_{\sigma} W \cdot \Delta^2) / \partial B_i = 2 \sum_{i=1}^k (B_i - \sum_{\sigma} W \cdot x \cdot V_i) = 0. \quad (21)$$

由于要求上式对任一干涉图均需成立, 故括号中的值不论 i 取何值均应为零。即:

$$B_i = \sum_{\sigma} W \cdot x \cdot V_i. \quad (22)$$

将(22)式代入(16)式最终得系数向量 Q 。而将干涉图样表示成 Zernike 多项式系的线性组合。图 1 为一波面的干涉图。以上过程由程序 POLYNOMIAL 来实现。经计算得出前 30 项 Zernike 多项式系数。由展开式重构干涉图示于图 2 中。图 1 和图 2 在所取数据点集合上干涉级均方差为 0.013 波长 ($\lambda = 6328 \text{ \AA}$)。

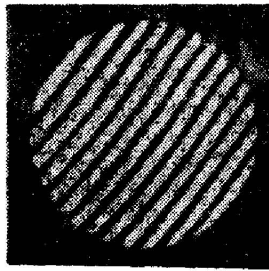


图 1 波面干涉图

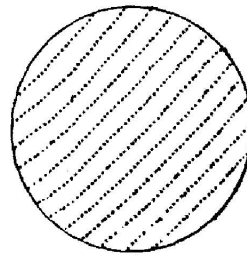


图 2 重构干涉图

Fig. 1 Interferogram of the wavefront

Fig. 2 Interferogram calculated from coefficient

拍摄干涉图时应注意如下几个问题:

- 1) 条纹级数增加方向应预先加以确定。现取定被检波面上的点, 其相位落后于参考波面上对应相位时, 程差为正。

2) 为了建立起底片和被检波面的对应关系, 即确定其相对方位, 以利于修正面形和调整, 应在被检系统上设置标志。

干涉图在坐标仪或显微密度计上进行测量。也可用电视系统自动采样并处理求得条纹的中心位置。测量点的分布和数量对计算结果有一定的影响。在实际计算中发现当数据点数量超过多项式项数不多时, 由 Zernike 多项式计算离散正交多项式的过程并不能顺利进行下去。这是由于在圆形区域取均匀分布的数据点时, 这些数据点强烈地趋向于原点对称, 而有一定的相关性。从计算还发现要保证计算能顺利地进行并节约计算时间, 数据点数量应为多项式项数的 2~3 倍。

拍摄干涉图前应预计一下准备选取的数据点数量而适当调整两相干波面的相对倾斜量。计算所得的系数在反射检验时由于光路折转返回应除以 2。

二、检验系统误差的去除

在光学系统和光学表面进行干涉检验时所使用的干涉仪其本身具有一定的误差。这些误差包括参考波面本身的偏差, 干涉仪中用于转折光路和分光元件的制造误差及干涉仪本身的调整误差等。它们统称为检验系统误差。最终要反映在结果中, 而限制了检验的精度。以下讨论如何将此误差和被检系统误差分离而去除的方法。当干涉图经计算求得了各 Zernike 多项式的系数后, 误差分离的过程可归结为对相应的系数进行分离。

首先调整干涉仪拍摄一组干涉图, 然后将被测镜相对于干涉仪绕其本身光轴旋转一个角度重新拍摄一组干涉图。按照下述步骤进行计算: 设被检波面偏差为 $M(\rho, \theta)$, 检验系统偏差为 $T(\rho, \theta)$ 。两个拍摄位置被检波面旋转了 ϕ 角, ϕ 逆时针为正。两相干波面在初始位置时干涉图展开式为 $F_1(\rho, \theta)$ 。被检波面旋转 ϕ 角后干涉图展开式为 $F_2(\rho, \theta)$ 。则有:

$$F_1(\rho, \theta) = M(\rho, \theta) + T(\rho, \theta),$$

$$F_2(\rho, \theta) = M(\rho, \theta + \phi) + T(\rho, \theta),$$

$$F_2 - F_1 = M(\rho, \theta + \phi) - M(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^n (\Delta A_n^l \cos l\theta + \Delta A_n^{-l} \sin l\theta) R_n^l(\rho), \quad (23)$$

(23) 式中 ΔA_n^l 和 ΔA_n^{-l} 为二组干涉图对应的 Zernike 多项式系数之差, 由干涉图计算得到:

$$\begin{cases} \Delta A_n^l = A_{2n}^l - A_{1n}^l, \\ \Delta A_n^{-l} = A_{2n}^{-l} - A_{1n}^{-l}. \end{cases}$$

其中 $A_{2n}^l, A_{1n}^l, A_{2n}^{-l}, A_{1n}^{-l}$ 分别为展开式 F_2, F_1 中对应项的 Zernike 系数, 均为已知。另设:

$$M(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^n R_n^l(\rho) (A_n^l \cos l\theta + A_n^{-l} \sin l\theta),$$

则有:

$$\begin{aligned} M(\rho, \theta + \phi) &= \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^n R_n^l(\rho) [A_n^l \cos l(\theta + \phi) + A_n^{-l} \sin l(\theta + \phi)] \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^n R_n^l(\rho) [A_n^l \cos l\theta + A_n^{-l} \sin l\theta]. \end{aligned} \quad (24)$$

比较(24)式后一等式的两边得:

$$\begin{aligned} A_n'' &= A_n^i \cos l\varphi + A_n^{-i} \sin l\varphi, \\ A_n'^{-i} &= A_n^{-i} \cos l\varphi - A_n^i \sin l\varphi. \end{aligned}$$

此两式为用于计算波面某一位置的 Zernike 系数和旋转 ϕ 角后系数关系的公式。

综合(23)、(24)得:

$$A_n^i = \frac{1}{2} [(A_{2n}^{-i} - A_{1n}^{-i}) \frac{\sin l\varphi}{\cos l\varphi - 1} - (A_{2n}^i - A_{1n}^i)], \quad (25)$$

$$A_n^{-i} = \frac{1}{2} [-(A_{2n}^i - A_{1n}^i) \frac{\sin l\varphi}{\cos l\varphi - 1} - (A_{2n}^{-i} - A_{1n}^{-i})]. \quad (26)$$

由(25)和(26)式即可求得去除检验系统误差后的被检波面之 Zernike 多项式系数。(25)和(26)式中均有因子 $\sin l\varphi / (\cos l\varphi - 1)$ 。此因子当 $l\varphi$ 趋于 $2n\pi$ 时为 $0/0$ 型不定极限。在计算中会产生极大的误差,在选择 ϕ 角时应注意避免。同样地可以用旋转检验系统来求得检验系统本身的偏差分布。以上计算过程由程序 REMOVAL 来实现。

三、调整误差的去除

干涉图被表示成 Zernike 多项式后,为了进一步求得波差,必须去除参考波面和被检波面近轴处的不重合(包括顶点和曲率中心的不重合)。具体表现在展开式的如下几项中:

- 1) 常数项反应了近轴顶点的不重合,是由条纹零级选择的任意性引起的。
- 2) 倾斜项($\rho \cos \theta$, $\rho \sin \theta$)的系数反应了傍轴曲率中心在垂轴面上两个正交方向的不重合性或两相干波面近轴处的夹角。
- 3) 离焦项(ρ^2)的系数代表了两波面傍轴曲率中心沿轴的方向不重合。

只要简单地令这些系数为零即可消除这些误差的影响。当然这要在逐项按 ρ 和 θ 的同名函数归并后进行。图 3(a)~(e)是上述方法用于实际检验的例子。此时二相干波面在傍轴处重合,同时满足傍轴曲率中心重合的条件。

四、最佳焦面、点列图、点扩散、函数及传递函数的计算

1) 根据实际情况,选取近轴处和被检波面重合,而曲率中心在被检波面轴上,且与被检波面间均方偏差为极小的理想球面的球心所在垂轴平面为最佳像面的位置。此时被检波面的顶点曲率中心并不一定在该平面上。此时波面偏差的展开式引入一形式为 $B\rho^2$ 的附加项,其中 B 为常数。现讨论 B 的求法:

在整个被检区域上均方偏差表达式为:

$$\Delta = \frac{1}{s} \iint [B\rho^2 + F(\rho, \theta)]^2 ds. \quad (27)$$

均方偏差最小的条件为:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial B} = \frac{\partial}{\partial B} \frac{1}{s} \iint [B\rho^2 + F(\rho, \theta)]^2 ds = 0. \quad (28)$$

由(28)式微分后并变换可得:

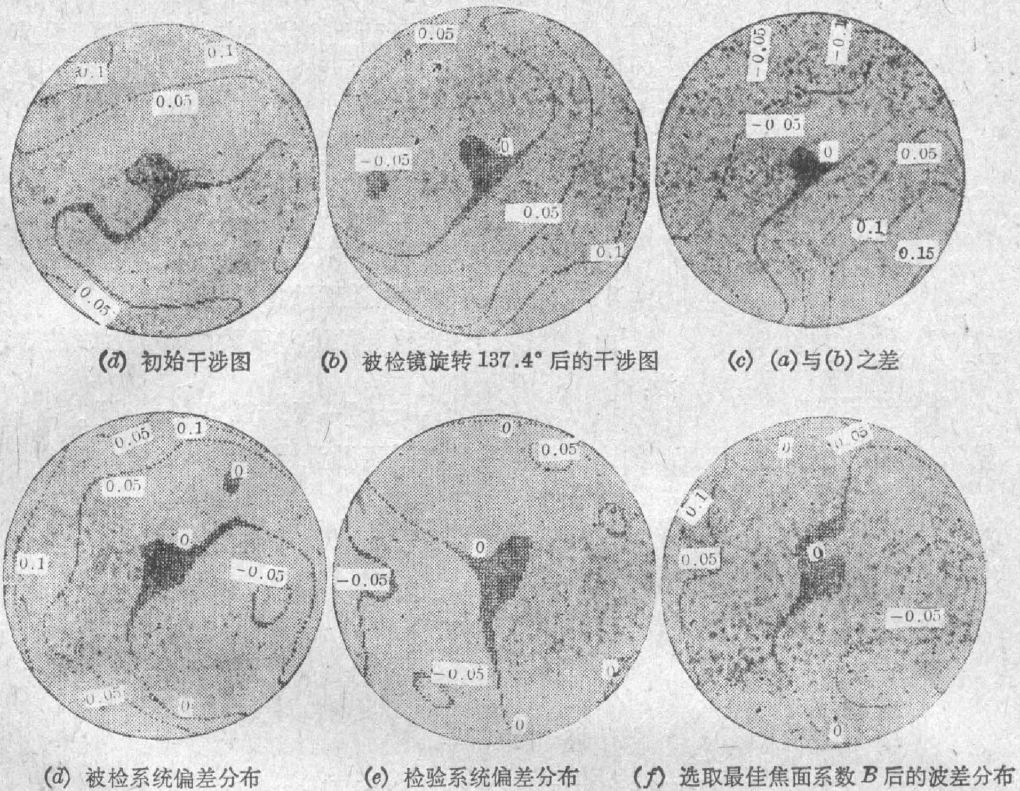


图 3

Fig. 3

(a) Original interferogram; (b) Interferogram with the tested mirror revolved for 137.4° degrees; (c) (a) from (b); (d) Wavefront error of the tested system; (e) Wavefront error of interferometric system; (f) Wavefront error after selecting B

$$B = - \frac{\iint_s F(\rho, \theta) \rho^2 ds}{\iint_s \rho^4 ds} \quad (29)$$

(29) 式的分子根据 Zernike 多项式的周期特性可知包含有 $\sin l\theta$ 和 $\cos l\theta$ 的项和 ρ^2 的乘积在单位圆内积分为零而简化为:

$$B = \frac{3}{\pi} \iint_s \rho^2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]^*} Q_{2k}^0 R_{2k}^0(\rho) ds, \quad (30)$$

* 号表示取整。(30) 式考虑到检验时调整误差的去除还可进一步简化, 即把含于 $R_{2k}^0(\rho)$ 中的 ρ^2 和常数因子去除, 则 B 的表达式就极为简单了。

图 3(d) 的波面经过选择 B 后的波差分布示于图 3(f) 中, 此时的 B 值为 -0.1064 。由此图可明显地看出最大波差和均方波差都大大地减小了。

2) 点列图的计算:

在光学系统的最佳焦面选定后, 波面的波差表达式为:

$$F'(\rho, \theta) = F(\rho, \theta) + B\rho^2. \quad (31)$$

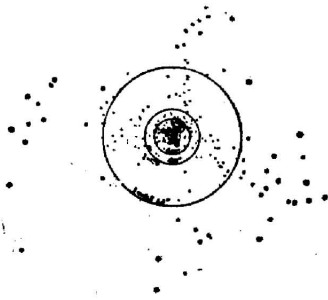


图 4 像点列图

Fig. 4 Spot diagram
of the image

将整个被检区域划分成网格后, 以每格中任一光线在最佳焦面的交点作为该面元上光线集中点所得的图为点列图。光线和最佳焦面的交点坐标即横向像差 TA_x 和 TA_y 。此两值与 F' 的关系为^[4]:

$$TA_x = (\lambda/n\mu_0) (\partial F' / \partial x),$$

$$TA_y = (\lambda/n\mu_0) (\partial F' / \partial y).$$

由程序 PLOT 计算例示波面的点列图示于图 4 中。

3) 点扩散函数和传递函数的计算:

由上述所得之光瞳处的波差函数即可知系统的光瞳函数

为:

$$G(x, y) = \exp[-(i2\pi/\lambda)F'(x, y)].$$

根据以下两式即可算得系统的点扩散函数和传递函数为^[5]:

$$\text{PSF}(\xi, \eta) = \left| [1/(\lambda R^2)] \iint_{-\infty}^{\infty} G(x, y) \exp[-(2\pi i/\lambda R)(\xi x + \eta y)] dx dy \right|^2,$$

$$\text{OTF}(x/\lambda R, y/\lambda R) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x+x', y+y') G^*(x, y) dx dy / \iint_{-\infty}^{\infty} |G(x, y)|^2 dx dy.$$

参 考 文 献

- [1] D. Malacara; *Optical Shop Testing*, (Copyright 1978 by John Wiley and Sons, Inc.), 489.
- [2] R. Aspden, R. M. Donough *et al.*; *Appl. Opt.*, 1972, **12**, 2739.
- [3] 南京大学数学系计算数学专业编; *数值逼近方法*, (科学出版社出版, 1978), 76.
- [4] 王之江; *光学设计理论基础*, (科学出版社出版, 1965), 325.
- [5] 麦伟麟; *光学传递函数及其数理基础*, (国防工业出版社出版, 1979), 267.

Calculation of wavefront error and OTF from interferogram

YU JINGCHI

(Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 23 December 1983; revised 14 February 1984)

Abstract

This paper discusses a method used in the testing of the optical system and optical reflection mirror.

This method was based on the interference. The interferential pattern was expressed by the series of the Zernike circle polynomials. The coefficient of the series was obtained by Gram-Schmidt normalization method and the least square method.

This paper also discusses the method for removing the adjust error and the error of the testing system itself. The wavefront error and OTF was obtained from the series of the Zernike circle polynomials.