第4卷 第9期 1984年9月
光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA
Vol. 4, No. 9 September, 1984

# 轴向和螺旋磁场中的自由电子相干辐射

王海林 陈建文
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

**提　　要**

本文用单粒子理论方法，详细讨论了螺旋磁场近磁共振下的电子相空间运动方程和辐射场方程，得到了近磁共振下电子辐射的频率红移，谱线展宽和增益增强。我们的理论还适用于变周期和梯度螺旋磁场的情况。

## 一、引　　论

自由电子激光器是一种将电子束动能转换成相干辐射能的装置，其辐射能量的大小，与电子束特性，Wiggler 的结构等参数有关。为了有效地将电子束能量耦合到辐射场中去，人们开展了大量的理论和实验研究工作[1~6]，并研究了多种型式的 Wiggler 结构。Kroll 等人采用单粒子模型，运用哈密顿正则变换的方法，推导出一组设计可变 Wiggler 参数的自由电子激光器方程。Madey 等人也同时提出使用梯度螺旋磁场的方案[3,4]。但实际工作中螺旋磁场不能做得很高，电子束的横向发散等因素严重限制了自由电子激光器增益的提高。为了克服这些困难，一般再加上一个轴向磁场来准直电子束，当电子束坐标系中螺旋磁场旋率等于电子的回旋频率，即磁共振时，可以得到增益的共振增强。关于这个问题已经做了很多工作[7~10]，一般都非常繁复，与螺旋磁场情况下的理论的联系不是很直接，而且各自采用的方法不同，得到的结论也不尽相同。

本文在轴向磁场远大于螺旋磁场的条件下，忽略电子间的静电相互作用，用单粒子理论将三维问题化成一维问题，得到一组与 N. M. Kroll 的自由电子激光器基本方程相类似的方程，从这些方程可以看出轴向磁场的引入相当于使螺旋磁场增强为一个与回旋频率和初始速度有关的等效螺旋磁场。分析这些方程可以得到频率红移、谱线展宽、增益增强等结论。我们的工作方程也可以作为计算机模拟计算和自由电子激光器参数设计的基础。

## 二、电子的动力学方程

本节我们将推导出电子的横向动量、未扰轨道和纵向动量的运动方程。假设辐射场是圆偏振的：

$$\boldsymbol{A}_L = A_L(z)\left[\hat{e}_x\cos(\theta_L-\omega t+\phi_L)-\hat{e}_y\sin(\theta_L-\omega t+\phi_L)\right]=A_L(z)\hat{e}_1。\tag{1}$$

螺旋磁场为：

收稿日期：1983年12月1日

$$\boldsymbol{A}_w=-\frac{B_\perp}{K_w}[\hat{e}_x\cos(\theta_w+\phi_w)+\hat{e}_y\sin(\theta_w+\phi_w)],\tag{2}$$

轴向磁场为:

$$\boldsymbol{A}_a=-\frac{1}{2}B_f y\hat{e}_x+\frac{1}{2}B_f x\hat{e}_y,\tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{A}_L$, $\boldsymbol{A}_w$, $\boldsymbol{A}_a$ 都是矢势, $A_L(z)$是 $z$ 的慢变函数。$\theta_w=\int_0^z K_w(z')dz'$, $\theta_L=\int_0^z K_L(z')dz'$。而 $K_w=2\pi/\lambda_w$, $\lambda_w$ 是螺旋磁场的周期, $K_w$, $K_L$ 是 $z$ 的慢变函数, 按系统的对称性, 上列式中, 我们选用了螺旋坐标基矢, 且 $\hat{e}_1=\hat{e}_x\cos\varphi_L-\hat{e}_y\sin\varphi_L$, $\hat{e}_2=(-\hat{e}_x\sin\varphi_L-\hat{e}_y\cos\varphi_L)$, $\hat{e}_3=\hat{e}_z$。

单电子的哈密顿量为:

$$\begin{aligned}H=\gamma mc^2&=\left[1+\left(\frac{\boldsymbol{P}_\perp-e\boldsymbol{A}_\perp/c}{mc}\right)^2+\left(\frac{P_z}{mc}\right)^2\right]^{1/2}mc^2\\&=\left[1+\left(\frac{\boldsymbol{p}}{mc}\right)^2\right]^{1/2}mc^2,\end{aligned}\tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{A}_\perp=\boldsymbol{A}_L+\boldsymbol{A}_w+\boldsymbol{A}_a$, $z$ 是相对论因子, $e$ 是电子电荷, $c$ 为光速。$\boldsymbol{P}_\perp$ 是横向正则动量, $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A}_\perp/c$ 是力学动量。由正则方程:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=-\nabla H。\tag{5}$$

容易解得:

$$P_x=\frac{1}{2}\frac{e}{c}B_f y,\tag{6a}$$

$$P_y=-\frac{1}{2}\frac{e}{c}B_f x。\tag{6b}$$

这里我们让积分常数为零。而

$$\boldsymbol{P}_\perp=\frac{|e|}{c}\boldsymbol{A}_L+\frac{|e|}{c}\boldsymbol{A}_w+\frac{|e|}{c}(-B_f y\hat{e}_x+B_f x\hat{e}_y),\tag{7}$$

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{mc^2}{2\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\boldsymbol{p}_\perp}{mc}\right)^2。\tag{8}$$

可见$(\boldsymbol{p}_\perp/mc)^2$就相当于有质动力势(Pondermotive potential)。

考虑电子的未微扰轨道, 即让辐射场 $A_L(z)=0$, 从 (7) 式: $p_x=\frac{|e|}{c}(A_{wx}+B_f y)$, $p_y=\frac{|e|}{c}(A_{wy}+B_f x)$。可以解得:

$$x=-r_0\sin(\theta_w+\phi_w),\tag{9a}$$

$$y=r_0\cos(\theta_w+\phi_w),\tag{9b}$$

$$z=ut,\tag{9c}$$

式中: $r_0=\frac{\Omega_\perp}{K_w(K_w u-\Omega_f)}$, $\Omega_\perp=\frac{eB_\perp}{\gamma mc}$, $\Omega_f=\frac{eB_f}{\gamma mc}$。

$|r_0|$ 是回旋半径, $\Omega_f$ 是回旋频率, $u$ 是电子的初始纵向速度。$K_w u=\Omega_f$ 就相当于电子坐标系中螺旋磁场的频率, 等于回旋频率, 即磁共振情况。

## 三、电子的相空间方程

由于超导线圈的能力限制, 不可能将螺旋磁场做得很高, 对于相对论电子束, 在前面所

说的磁共振情况下，一般轴向磁场将远远大于螺旋磁场，同样辐射场也远远小于轴向磁场。即

$$B_{/\!/} \gg B_{\perp} \gg K_L A_L。 \tag{10}$$

本节我们将求出电子的能量和有质动力势中相位$\psi$的运动方程。首先引入归一化量：

$$\boldsymbol{a}_L = \frac{|e|}{mc^2}\boldsymbol{A}_L, \quad \boldsymbol{a}_w = \frac{|e|}{mc^2}\boldsymbol{A}_w, \quad \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{p}_\perp}{mc}。$$

则有质动力势为：

$$\boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{a}_L + \boldsymbol{a}_w)^2 + 2(\boldsymbol{a}_L + \boldsymbol{a}_w)\cdot\frac{|e|}{mc^2}(-B_{/\!/} y\hat{e}_x + B_{/\!/} x\hat{e}_y) + \left(\frac{|e|}{mc}\right)^2(-B_{/\!/} y\hat{e}_x + B_{/\!/} x\hat{e}_y)^2, \tag{11}$$

$a^2$中含有$x$和$y$，使问题成为一个三维问题，这正是有轴向磁场时自由电子激光器理论的难点。

由能量方程：$\dfrac{d\gamma}{dt} = \dfrac{1}{mc^2}\dfrac{dH}{dt}$，容易得到：

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(a^2), \tag{12}$$

代入(9)和(11)式，并忽略$a_L$的二次项，得到：

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\eta\frac{a_L a_w \omega}{\gamma}\sin\varphi, \tag{13}$$

式中$\varphi = \theta_L + \theta_w + \phi_L + \phi_w - \omega t$，$\eta = \dfrac{K_w u}{\Delta\Omega}$，$\Delta\Omega = K_w u - \Omega_{/\!/}$。

$$\frac{d\psi}{dt} = (K_L + K_w)u_z - \omega = K_w C - \frac{K_L C}{2\gamma^2}(Ha^2)。 \tag{14}$$

在(10)式的条件下，忽略$a^2$中与$a_L$有关的项，从(11)式可求得：

$$\boldsymbol{a}^2 \simeq a_w^2 + \left(\frac{|e|}{mc^2}\right)^2\left[\frac{2B_\perp B_{/\!/}\gamma_0}{K_w} + B_{/\!/}^2\gamma_0^2\right] = \eta^2 a_w^2,$$

对于相对论电子近似有$\dfrac{d}{dz} \simeq \dfrac{1}{c}\dfrac{d}{dt}$，则可以得到相空间电子运动方程：

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\eta\frac{a_L a_w K_L}{\gamma}\sin\varphi, \tag{15a}$$

$$\frac{d\psi}{dz} = K_w - \frac{K_L}{2\gamma^2}(1 + \eta^2 a_w^2)。 \tag{15b}$$

由文献[4]网包(Bucket)的同步能量可定义为：

$$\gamma_R^2 = \frac{K_L}{2K_w}(1 + \eta^2 a_w^2), \tag{16a}$$

对应的相位用$\varphi_R$表示，则：

$$\frac{d\gamma_R}{dz} = -\eta\frac{a_L a_w K_L}{\gamma_R}\sin\varphi_R。 \tag{16b}$$

由于$\eta$与电子的初始速度有关，网包中心会随着电子的初始速度发散有一个色散。

## 四、辐射场方程

本节我们将从Maxwell方程出发，得出辐射场的振幅和相位的方程。

自由电子的辐射来源于横向摆动所产生的横向电流密度，考虑到网包外的电子对增益几乎没有贡献，我们可以定义：

$$\boldsymbol{J}_{\perp}=\sum_{i}\frac{e}{\gamma_{i}mV}\boldsymbol{p}_{\perp i}。\tag{17}$$

$\sum\limits_{i}$ 是对相互作用区域中网包内的电子求和，$V$ 是相互作用区域的体积，$\boldsymbol{p}_{\perp}$ 由(7)式给出

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}_L=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{\perp}。\tag{18}$$

将(1)式代入到(18)式中：

$$\frac{2\omega}{c}\delta K_L A_L\hat{e}_1-\frac{2\omega}{c}\frac{dA_L}{dz}\hat{e}_2=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{\perp},\tag{19}$$

式中：$\delta K_L=K_L-\frac{\omega}{c}$ 表示辐射场的色散，$\hat{e}_2$ 则为 $\hat{e}_2=(-\hat{e}_x\sin\varphi_L-\hat{e}_y\cos\varphi_L)$。

推导过程中用了慢变振幅近似。将(9)、(17)式代入到(19)式，在零级近似下得到：

$$\delta K_L a_L\hat{e}_1-\frac{da_L}{dz}\hat{e}_2=-\frac{\omega_P^2}{2\omega c}\cdot\frac{1}{N_e}\sum_{i}\frac{1}{\gamma_i}\{a_L\hat{e}_1+\eta_w(a-\hat{e}_x\cos\varphi_{wi}-\hat{e}_y\sin\varphi_{wi})\},$$

上式左右两边同时点乘 $\hat{e}_2$，求得辐射场方程：

$$\frac{da_L}{dz}=\frac{\omega_P^2}{2\omega c}\eta a_w\left\langle\frac{\sin\psi}{\gamma}\right\rangle_{\wedge},\tag{20a}$$

$$a_L\delta K_L=\frac{\omega_P^2}{2\omega c}\eta a_w\left\langle\frac{\cos\psi}{\gamma}\right\rangle_{\wedge},\tag{20b}$$

式中 $\omega_P^2=\frac{4\pi n_e e^2}{m}$ 是等离子振荡频率，为方便起见我们假设电子束截面等于光束截面，即耦合因子 $F=1$[4]，$n_e$ 是网包内的电子密度。$\langle\ \rangle_{\wedge}$ 表示对网包内的电子求平均。

## 五、讨　论

在三、四两节中，我们得出了电子的相空间轨道方程和辐射场方程，与 Kroll 等人的理论[4]相比较，可以看出在有强轴向磁场的情况下，螺旋场的振幅相当于被一个有效振幅 $\eta B_{\perp}$ 取代。下面我们讨论几个问题。

**1．小信号增益**　经过简单计算，我们可将(20a)式写成规一化的电场强度形式：

$$\frac{de_s}{dz}=\frac{\omega_P^2}{2c}\eta a_w\left\langle\frac{\sin\psi}{\gamma}\right\rangle=ge_s,$$

式中 $g$ 是小信号增益，因此我们获得了：

$$g=\frac{\omega_P^2 uB_{\perp}}{2LE_s\Delta\Omega}\left\langle\frac{\sin\psi}{\gamma}\right\rangle。\tag{21}$$

从(21)式明显地可看到磁共振情况下的增益增强。注意到当 $\Omega_f\geqslant K_w u$ 时，增加轴向磁场反而会降低增益[10]。

**2．谱线中心的移动**　由(16)式可以看到，对于同样能量的入射电子束，加有轴向磁场的自由电子激光器在近磁共振情况下，其辐射场的频率要发生红移，即向长波方向移动。

假定有轴向磁场的各物理量以不带撇的符号表示，无轴向磁场的各物理量带撇表示，

则：

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda'=\lambda\frac{a^2-a'^2}{1+a^2},$$

$$\Delta\lambda=\lambda\frac{(\eta^2-1)}{1+a^2}a_w^2, \tag{22}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda'}\simeq(\eta^2-1)a_w^2, \tag{23}$$

式中 $\lambda$ 为辐射波长。因为 $\eta$ 与初始速度分布有关，则电子束的初始发散就导致一个谱线的展宽，这种展宽类似于激光器中的非均匀加宽。

事实上对于有限长度的螺旋磁场，即使不考虑电子束的初始发散，也不可能做到精确的磁共振，由测不准关系：

$$L\Delta K_w=2\pi,$$

式中 $L$ 是螺旋磁场的长度，我们得到 $\eta$ 值的理论极限：

$$\eta_{\max}=\frac{K_wL}{2\pi}=N, \tag{24}$$

$N$ 是螺旋磁场的周期数目，而实际上能达到的 $\eta$ 值比这还要小得多。

**3．方程(15a)，(15b)，(20a)和(20b)构成了轴向和螺旋磁场中自由电子激光器的基本工作方程** 当已知电子的初始速度和相位时，就可以用计算机追迹求出电子在相空间中的轨迹和场的发展情况。为了使网包减速，Kroll 和 Madey 等人提出了变周期或变振幅螺旋磁场的方案。我们的理论对这两种情况的螺旋磁场加上轴向磁场也是适用的。这从(15b)式可以看出，选择合适的可变的 $K_w$ 或 $a_w$，总可以使 $\psi$ 变化很小或者不发生变化。对于某一固定的波长而言，从而保证了自由电子和辐射场之间最大能量交换。原则上上列的基本方程可以作为自由电子激光器设计的基本工作方程。

## 参 考 文 献


[1] L. R. Elias *et al.*; *Phy. Rev. Lett.*, 1976, **36**, 13 (Mar), 717.
D. A. G. Deacon *et al.*; *Phy. Rev. Lett.*, 1977, **38**, 16 (Apr) 892.
[2] 王之江；中国科学院光学精密机械研究所集刊(长春)第一集 (1963) **117.**
《科学通报》, 1983, **28**, 211.
《光学学报》, 1981, **1**, No. 2 (Mar), 115; 1982, **2**, No. 1 (Jan), 1.
王润文等；《中国激光》, 1983, **10**, No. 7 (Jul), 385.
谭维翰；《光学学报》, 1982, **2**, No. 1 (Jan), 4.
[3] S. F. Jacobs *et al.*; *《Free-Electron Generators of Coherent Radiation》*, **7**, (Addison-Wesley publishing company 1982).
[4] N. M. Kroll *et al.*; *IEEE. J. Q. E.*, 1981, **QE-17**, No. 8 (Aug), 1436.
[5] W. B. Colson; *Phy. Lett.*, 1976, **59A**, No. 3 (Nov), 187.
[6] N. M. Kroll, *et al.*; *Phy. Rev.*, 1978, **17A**, No. 1 (Jan), 300.
[7] P. Sprangle; *Phy. Rev.*, 1978, **17A**, No. 5 (May), 1792.
[8] L. Friedland *et al.*; *Phys. Fluids*, 1980, **23**, 2376.
L. Friedland *et al.*; *Phy. Rev. Lett.*, 1980, **44**, No. 22 (Jun), 1456.
[9] I. B. Bornstein *et al.*; *Phy. Rev.*, 1981, **23A**, No. 2 (Feb), 816.
[10] S. H. Gold, *et al.*; *《Free-Electron Generators of Coherent Radiation》*, **9**, 741. (Addison-Wesley publishing company 1982).
[11] F. A. Hopf *et al.*; *Opt. Commu.*, 1976, **18**, No. 4 (Sep), 413.

# Free-electron coherent radiation in axial and helical magnetic fields

WANG HAILING AND CHEN JIANWEN
(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 1 December 1983)

## Abstract

A detailed discussion is made on phase-space motion equations and radiation field equations for free-electrons near the magnetic resonance in the axial and helical magnetic fields. Red-shift spectral broadening and gain enhancement for free-electron radiation are obtained near magnetic resonance. Our theory is applicable to variable periodic and taper helical wiggler fields.

## CLEO '85 会议预告

The Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO '85) 将于1985年5月21～24日在美国 Baltimore, Maryland 召开。应 CLEO '85 节目委员会主席 D. H. Auston 和 R. R. Jacobs 的邀请，我国由中国科学院上海光学精密机械研究所王之江教授为主席、上海复旦大学章志鸣教授、中国科学院大连化学物理研究所张存浩教授和天津南开大学张光寅副教授等组成地区节目委员会，受理国内投稿。

### 会议论题的范围

1．大气应用；
2．工业应用(包括材料加工等)；
3．激光化学物理；
4．激光聚变和激光产生的等离子体；
5．气体激光器；
6．固体和液体激光器；
7．医学应用；
8．激光在微电子学上的应用；
9．非线性光学和非线性光谱学；
10．光通信(包括纤维光学和光源)；
11．光学信息处理、光开学和双稳态；
12．光学贮存；
13．超快光学和电子学；
14．光学材料和元件；
15．其它。

国内投稿请寄：**上海市8211邮政信箱 王之江教授收**
收稿截止日期：1984年12月3日