

# 一个混合型双稳系统的非稳特性 及其无序过渡分析\*

高 锦 岳

(吉林大学物理系)

L. M. 那都奇 袁建民 M. 斯堪什

(美国德莱索大学物理系)

## 提 要

本文分析了一个具有反馈延时回路的混合型双稳系统的非稳区域划分,并研究了自脉冲周期振荡及其无序过渡。输出强度的快速傅里叶变换谱为此系统的非稳特性分析提供了重要信息。

## 一、引 言

本文分析了如图1所示的混合型双稳系统的平衡态及其非稳特性<sup>[1~3]</sup>,研究了周期振荡及其无序过渡。由电子计算机对随时间发展信号所作的模拟计算,特别是随时间发展信号的傅里叶变换谱分析,揭示了系统由周期振荡到无序振荡的可能机制。

图1所示的混合型双稳系统可用具有延迟的一对相互耦合方程来描述。

$$U(t) = I \cdot \{1 - k \cos(\pi[E_B + E(t)]/E_\pi)\} / 2, \quad (1)$$

$$\tau dE(t)/dt + E(t) = aU(t-T), \quad (2)$$

其中  $U(t)$ ,  $I$ ,  $k$ ,  $E_\pi$ ,  $E_B$ ,  $E(t)$ ,  $\tau$ ,  $a$ ,  $T$  分别表示输出强度,输入强度,调制器的调制度,调制器半波电压,固定偏压,经反馈回路的调制电压,系统弛豫时间,与放大器有关的光电转换因子,以及反馈回路的延迟时间。稍作适当代换,上述方程可写成更方便的形式:

$$X(t) = Y \{1 - k \cos[\theta + V(t)]\} / 2, \quad (3)$$

$$(dV(t)/dt) + V(t) = X(t-T)。 \quad (4)$$

这里  $X(t) = \pi a \cdot U(t) / E_\pi$ ,  $Y = \pi a \cdot I / E_\pi$ ,  $\theta = \pi E_B / E_\pi$ ,  $V(t) = \pi \cdot E(t) / E_\pi$  分别与输出强度,输入强度,偏置电压及反馈调制电压相对应,而这里的时间则从系统的弛豫时间作为单位来度量。

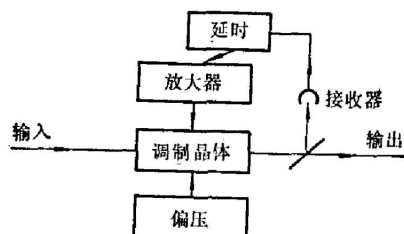


图1 带有延时反馈回路的混合型双稳态系统略图

Fig. 1 A schematic diagram of a hybrid bistable system with a delay in the feedback loop

收稿日期: 1983年12月26日; 收到修改稿日期: 1984年2月29日

\* 本文曾在'83 ICL(中国,广州)上宣读。

## 二、平衡态及其非稳特性分析

由方程(3), (4)可得到描述系统的平衡态, 即  $dV(t)/dt=0$ ,  $X(\infty)=V(\infty)$  的方程:

$$X^* = Y^* [1 - k \cos(\theta + X^*)] / 2. \quad (5)$$

此处,  $X^*$ 、 $Y^*$  分别表示平衡态的输出、输入强度。图2是由方程(5)得到的输出-输入关系曲线(这里只画出其中的两支, 实际上是多支的)。由图2可清楚看出此系统所具有的双稳特性。

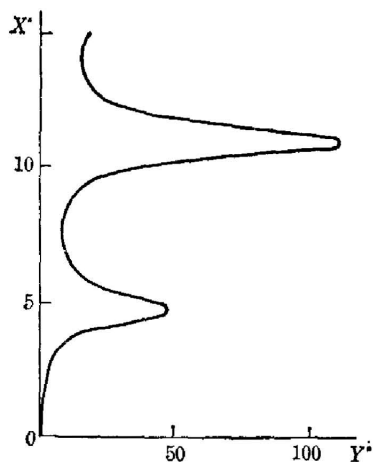


图2 输出-输入平衡态曲线

Fig. 2 The output-input curve at steady state, where parameters are  $k=0.8$ ,  $\theta=\pi/2$

分析此系统非稳性质的难度除因为方程中所出现的  $k$ ,  $\theta$ ,  $T$  都是控制系统状态的可变参数之外, 还由于方程(3)、(4)实际上相当于一个无限维微分方程组, 而对这样的系统就一般的数学来说, 知道的还很少。幸而, 调制度  $k$ 、偏压  $\theta$  对所研究的物理问题的分析, 并无实质性的影响。所以在以下分析过程中, 把它们取为固定常数,  $\theta=\pi/2$ ,  $k=0.8$ , 而仅把延迟时间  $T$  作为控制参数。为分析每一平衡态的稳定特性, 先将方程(4)的右边在某一平衡态  $Y^*$  附近展开得到:

$$(dp(t)/dt) + p(t) = kY^* \sin(\theta + X^*) \cdot p(t-T)/2. \quad (6)$$

此处,  $p(t) = V(t) - V(\infty)$ 。这样, 平衡态的稳定判据将由以下超越方程给出<sup>[4,5]</sup>

$$S + 1 + kY^* \sin(\theta + X^*) \exp(-TS)/2 = 0. \quad (7)$$

这里  $S$  是线性化问题的本征值, 它是一个常数,  $\text{Re } S$  为其实部。如果在所选的参数下,  $\text{Re } S > 0$ , 则所选的工作点是不稳定的, 如果  $\text{Re } S < 0$ , 则所选的工作点是稳定的。如果把  $S$  用实部和虚部来表示,  $S = \alpha + i\beta$ , 则方程(7)变为更方便的形式:

$$\alpha + 1 - W \exp(-T\alpha) \cos T\beta = 0, \quad (8)$$

$$\beta + W \exp(-T\alpha) \sin T\beta = 0. \quad (9)$$

此处,  $W = kX^* \cdot \sin(\theta + X^*) / [1 - k \cos(\theta + X^*)]$  是与输出强度相对应的参数。

分析方程(8), (9)可以对每一平衡点的稳定性进行某些分类:

(1) 当  $W > 1$  时, 方程(8), (9)总是存在一组  $\beta=0$ ,  $\alpha > 0$  的解, 所以与  $W > 1$  相对应的状态是不稳定的。容易证明:  $dX^*/dY^* = [1 - k \cos(\theta + X^*)] / 2(1 - W)$ 。由此看出  $W > 1$  与平衡态曲线中具有负斜率的分支,  $dX^*/dY^* < 0$  相对应。因此, 平衡态曲线中所有在负斜率分支上的点都是不稳定的。换句话说, 系统的任何起伏都可以使原来位于上述状态的工作点, 转移到相邻的上支或下支去。

(2) 当  $|W| < 1$  时, 这是处在平衡态曲线具有正斜率的区域内。因为  $\cos T\beta \leq 1$ , 所以方程(8), (9)中  $\alpha$  只可能有负值解,  $\alpha < 0$ 。因此, 这是一个稳定区域。

(3) 当  $W < -1$  时, 这是处在平衡曲线上具有正斜率的除  $|W| < 1$  以外的区域。这一区域内工作点的稳定性与反馈回路的延迟时间直接有关。也就是说延迟时间的不同可以使此区域的某工作点成为稳定的、周期振荡的、甚至无规律振荡的。非稳定区的边界, 在  $\alpha = 0$

时,由方程(8)、(9)的数值解,在  $X^*-T$  平面上画出,如图 3 所示。

为研究自脉冲周期振荡特性及其向无序振荡过渡的机制,首先由电子计算机获得方程(3)、(4)随时间发展解。在获得此解的过程中,采用了几种不同方法进行检验,以确保解的精确性和可靠性。然后对此随时间变化解作快速傅里叶变换。图 4 及图 5 分别给出短延迟时间和长延迟时间情况下,相应于不同参数的输出强度解,以及它们的傅里叶变换谱。

为更清楚地认识自脉冲振荡在不同参数下的特性和揭示某内在原因,图 6 还给出方程(8)、(9)在两种不同参数下的数值解。

图 4 相应于固定输出强度  $X^*=3.6$ , 改变延迟时间。图 4(a) 对应于延迟时间  $T=0.5$  的情形, 此处及下文中出现的延迟时间  $T$  均以系统弛豫时间作为单位。虽然输出自脉冲振荡看起来很象正弦波, 但它的傅里叶谱却是很丰富的。除基频和它的谐波之外, 还发现许多另外的振荡频率。仔细分析和测量傅里叶变换谱的各谱线频率, 发现除谐波之外, 这些新的频率和基频都与线性化问题的本征模振荡频率[即图 6(a) 所计算的解]非常接近。微小的差别显然是由于不同模之间的非线性耦合所致。事实上正是由于不同模之间的非线性耦合, 才会使那些本来还是稳态的模也开始振荡。因为从图 6(a) 可知, 在延迟时间比较短的情况下, 除基模以外, 所有其它模都是稳定模。图 7 给出由傅里叶谱测得的频率随延迟时间的变化, 以及由方程(3)、(4)所计算得到的线性化问题本征模随延迟时间变化的曲线。这样, 可以把傅里叶变换谱得到的频率与由本征值计算得到的频率直接比较。图中可以清楚看出, 由于不同模间非线性耦合, 使实际存在的振荡模频率, 相对于线性化本征模频率, 随延迟时间不同而产生相对移动。正是这种频率的相对移动, 为下面将要提到的频率锁定现象提供了可能。可以证明, 图 4(a) 中与线性化模频率相距较远的其它谱线, 是上述本征频率之间的线性叠加。利用上述方法, 可以对每一个非常复杂的傅里叶变换谱进行清楚的辨认。

图 4 中, 随着延迟时间的增长, 输出自脉冲会经历 1~2 次倍周期分叉过程。这一现象可由输出脉冲波形变化, 见图 4(b), 或是相对应的傅里叶谱中所出现的频率等于基频一半的新谱线看出。但是, 这种倍周期分叉的现象并没有象 Feigenbaum 问题的情形那样无限次地继续下去, 相反, 经过 1~2 次倍周期分叉以后输出波形反而变得更简单, 见图 4(c)。相应的傅里叶变换谱也成为非常有规律的结构。所有的振荡模频率都是基模频率的整数倍。这种频率锁定现象, 还可以从图 8 的基波及它的谐波随延迟时间变化的曲线中反映出来。由图 8 可见, 在越过非稳定阈值以后, 谐波相对基波的积分功率一直稳定上升, 但在  $T \cong 1.07$  处各频率的积分功率有一个突变。另外, 相应于超越方程(8)、(9)的稳态

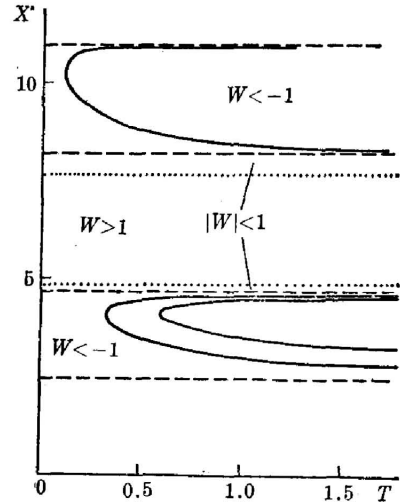


图 3 非稳定区的边界

Fig. 3 The boundary of the instability domain

The solid curve in this figure outlines the boundary of the instability domain (unstable states lie to the right of this boundary). Their asymptotes are shown as straight dashed lines. The dotted straight dashed lines represent the boundaries of the domain of instability corresponding to those segments of the state equation that have negative slope. The solid curve inside the lower instability domain outlines the chaotic region

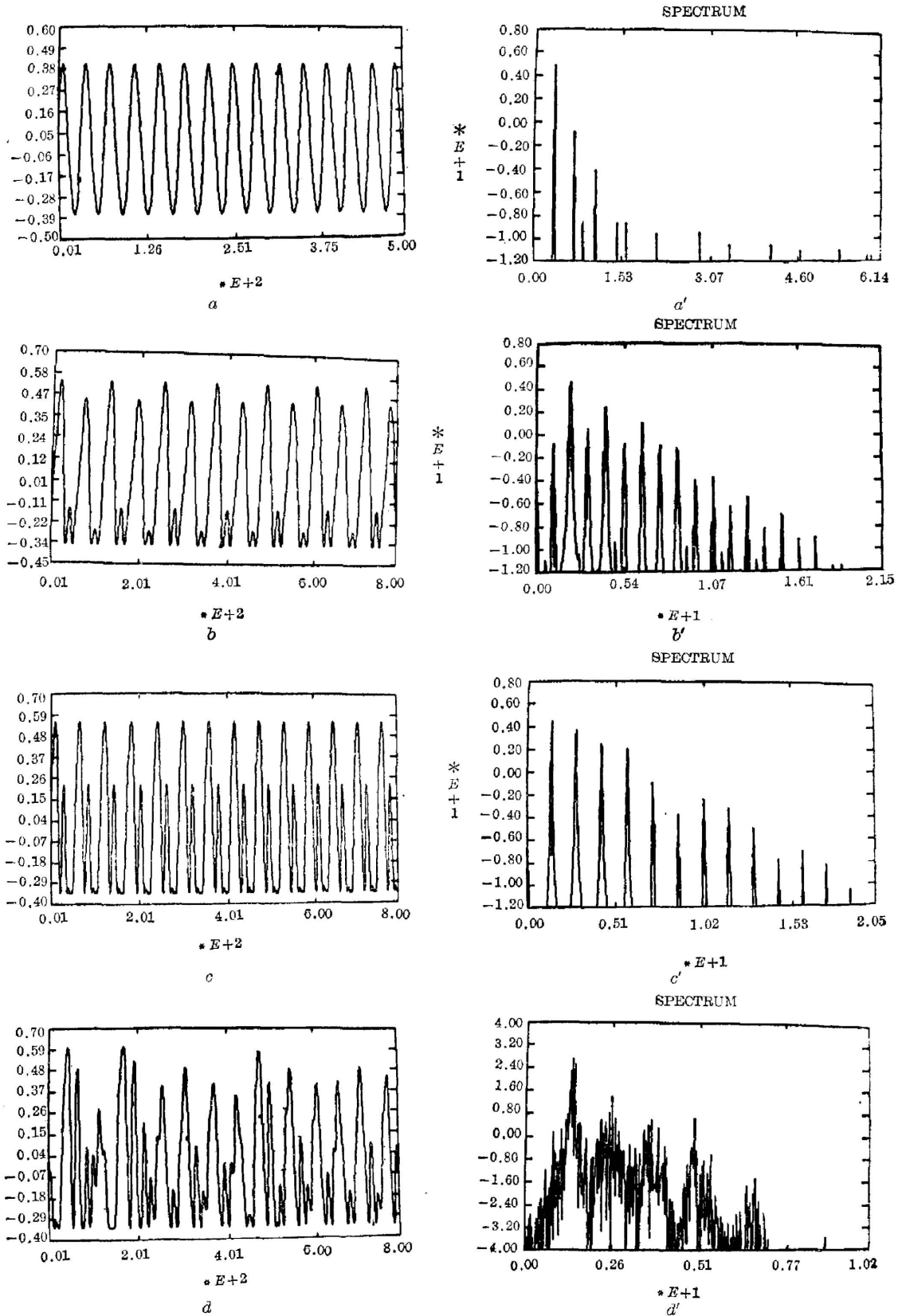


图4 相应于不同延迟反馈时间的自脉冲输出及它们的傅里叶变换谱

Fig. 4 Self-pulsing intensity and the corresponding power spectra for  $X^* = 3.6$  and (a and a')  $T = 0.5$ ; (b and b')  $T = 0.9$ ; (c and c')  $T = 1.09$ ; (d and d')  $T = 1.3$

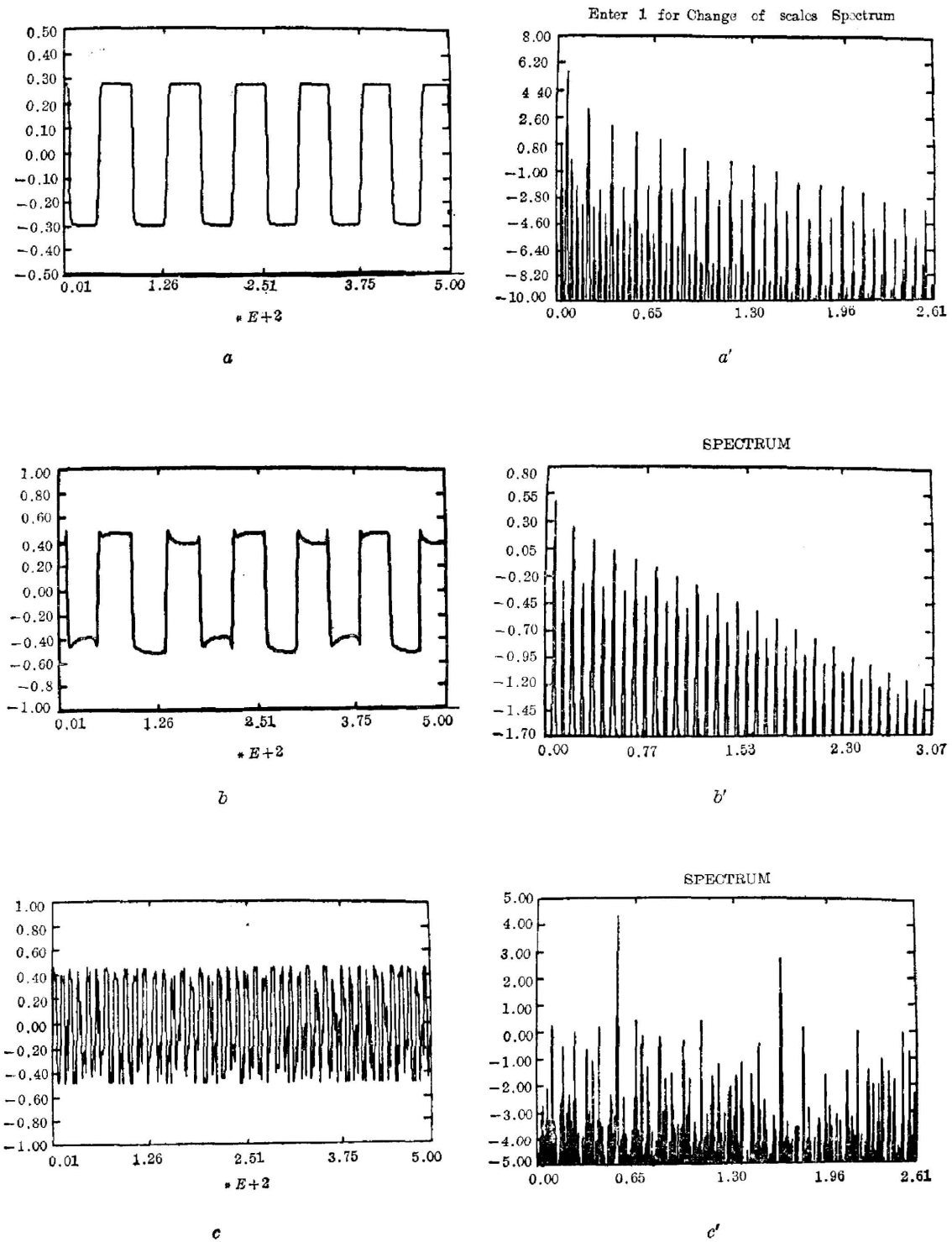


图5 相应于不同  $X^*$  值的自脉冲输出及它们的傅里叶变换谱

Fig. 5 Self-pulsing intensity and the corresponding power spectra for  $T=40$  and  
(a and a')  $X^*=2.6$ ; (b and b')  $X^*=2.8$ ; (c and c')  $X^*=3.25$

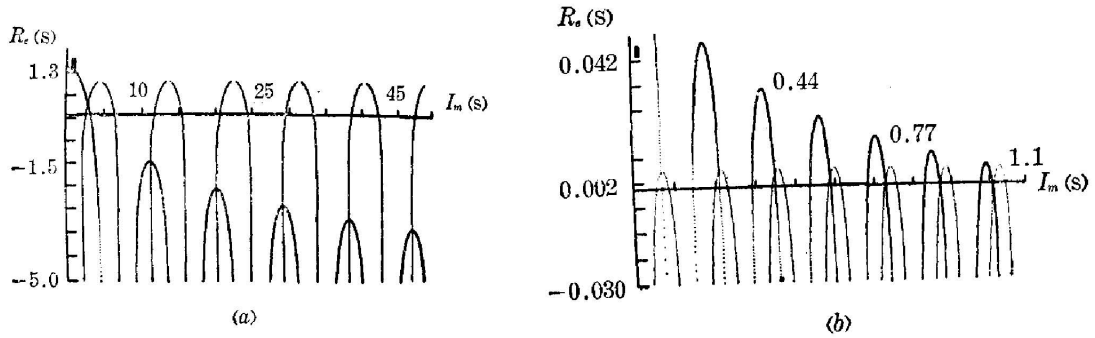


图 6 方程(8)、(9)的图解

Fig. 6 Graphical display of the complex roots of equations(8), (9)

The solutions of the secular equations lie at the intercept of the families of curves, the imaginary and the real parts of the roots, respectively. Thus, the points of intercept located above the horizontal axis correspond to unstable modes of the system. Fig. 1(a) has been shown for  $X^*=3.6$  and  $T=0.7$ .

Fig. 1(b) corresponds to  $X^*=2.6$  and  $T=40$ . In all cases we selected  $k=0.8$  and  $\theta=\frac{\pi}{2}$

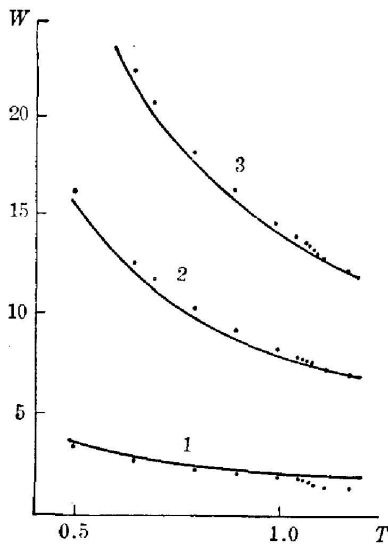


图 7 输出振荡频率随延迟时间的变化

Fig. 7 The imaginary parts of the eigenvalues (solid lines) are plotted as a function of the delay time. The dots intensify the location of the appropriate peaks from the power spectra corresponding to  $X^*=3.6$

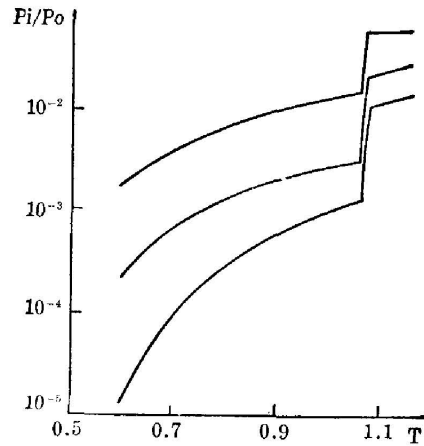


图 8 基模的 2 次、3 次、4 次谐波功率与基模功率比随延迟时间的变化关系

Fig. 8 Ratio of the 2nd (a), 3rd (b), and 4th harmonic powers to that of the fundamental line (c) as functions of the delay time  $T$

The rapid increase in the power ratio corresponds to the occurrence of frequency locking

本征值的谱线功率, 本来都是很小的(一般地比基频低 6~8 个数量级), 但是在  $T \cong 1.07$  附近突然增加 3~4 个数量级。

频率锁定现象在延迟时间  $T$  的变化中可以持续一个范围, 大约在延迟  $T \cong 1.3$  附近消失。这时输出呈现为一系列无规则的混乱振荡, 如图 4(d) 所示。这显然可解释为许多受激模失去同步向独立振荡的结果。

对于长延迟的情形, 输出自脉冲周期振荡随延迟不同的变化及向无序混乱振荡的过渡机制与短延迟的情形并无实质差别。图 5 给出了相应于固定的延迟时间  $T=40$ , 而改变输出强度时的自脉冲振荡波形及其相应的傅里叶变换谱, 便于和 Gibbs 实验相比较。在短延迟情形下, 由线性化问题的本征值解可知只有一个模在越过非稳定阈值以后是不稳定的, 其它的本征模都是稳定的, 在长延迟的情形下, 越过阈值以后, 当固定延迟时, 输出强度的微小变化就会导致许多本征模几乎同时成为不稳定的振荡模, 同时出现了频率锁定。图 6(b) 给出对应于延迟时间  $T=40$ , 输出强度  $X^*=2.6$  时由方程(8)、(9)所得到的线性化本征解, 而图 5(a) 则给出在上述参数下的输出波形及相应的傅里叶变换谱。从傅里叶谱可以看出, 所有奇次波功率比偶次波高得多, 而这正是为什么输出脉冲在这一运转参数下呈现方波的内因。随着输入强度的增加, 与短延迟的情形一样, 经过 1~2 次倍周期分叉以后 [如图 5(b)], 所有受激振荡失去了频率锁定和位相同步, 从而导致输出的无序混乱振荡 [如图 5(c)]。

上述在短延迟和长延迟下都只观察到有限次倍周期分叉, 而没有观察到更高次倍周期分叉, 其原因可能是所用电子计算机的容量不够大。进一步增加所用计算机的容量和提高傅里叶变换精度的工作正在进行。

### 三、结 论

本文分析了具有延迟反馈混合型双稳系统的平衡态及其非稳区域划分, 并在输出-反馈延时平面内划出了非稳边界及无序振荡区。自脉冲输出强度的傅里叶变换谱为分析自脉冲的周期振荡, 特别是周期向无序的过渡, 提供了一个有力的工具。

在短延迟情形下, 越过非稳阈值边界后, 仅有一个非稳模及它的谐波在输出中占统治地位。其它稳定模随着延迟时间的增加, 由于与基模的非线性耦合, 而对输出的贡献越来越大。不同模之间的频率锁定和同步振荡是该双稳系统的一个重要现象, 而频率锁定和同步的消失导致了无规输出振荡。

对长延迟的情形, 虽然输出波形与短延迟时截然不同, 但从有序到无序振荡的过渡机制则是一样的。输出波形的不同, 归因于两种情形下线性化问题的本征模有不同结构。

### 参 考 文 献

- [1] K. Ikeda; *Optics Comm.*, 1979, **30**, No. 2 (Aug), 257.  
K. Ikeda and H. Daido; *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **45**, No. 9 (Sep), 709.
- [2] L. A. Lugiato *et al.*; *Proc. 10th Intl. Symposium on synergetics*, (edited by H. Haken, Springer-Verlag, 1982) and references there in.
- [3] H. M. Gibbs *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **46**, No. 7 (Feb), 474.  
F. A. Hopf, *et. al.*; *Phys. Rev.*, 1982, **25A**, No. 4, 1272.
- [4] M. Okada and K. Takizawa; *J. Quantum Electron.*, 1981, **QE-17**, No. 10 (Oct), 2135.
- [5] J. Y. Cao *et al.*; *Optics Comm.*, 1983, **44**, No. 3 (Jan), 201.

## **Analysis of instabilities and the route to chaos in a hybrid bistable system\***

GAO JINYUE

*(Physics Department, Jilin University)*

L. M. NARDUCCI J. M. YUAN M. SQUICCIARINI

*(Physics Department, Drexel University, U. S. A.)*

(Received 26 December 1983; revised 29 February 1984)

### **Abstract**

In this paper, the instability region for a hybrid bistable system with a delay in the feedback loop has been analysed. The self-pulsing periodic oscillation and the route to chaos have been studied. The Fourier transform spectrum of the temporal output intensity has provided important informations for the instability behaviour analysis of the system.

---

\* This paper was presented at '83 ICL (Guangzhou, China).