

# 任意折射率分布单模光纤的色散

周 文 俊

(武汉邮电科学院)

## 提 要

本文解决了任意折射率分布单模光纤色散的计算问题。文中引入了光纤的“光学尺寸”这一无量纲参数,并由此导出了新的单模色散公式。色散公式中的各参数分别利用变分-有限元法和 Sellmeier 系数算出。我们利用依此编制的计算机程序计算了各方次律分布单模光纤在  $1.3\mu\text{m}$  和  $1.55\mu\text{m}$  这两个低损窗口处的色散曲线,研究了折射率中间凹陷对阶跃单模光纤色散的影响。文中提供的方法不仅可用于计算实际单模光纤的色散,还可用来研究新型光纤,为单模光纤的设计、制造和测量提供重要资料。

## 一、前 言

与多模光纤一样,降低衰耗以获得较大的中继距离,减小色散来提高传输信号的比特率也是单模光纤的两个重要研究课题。当前,单模石英光纤在  $1.55\mu\text{m}$  处的损耗已降至  $0.2\text{dB/km}$ ,接近其  $0.18\text{dB/km}$  的理论损耗极限。在单模光纤色散特性的研究中,大部分集中于研究阶跃单模光纤。尽管 Gambling 等人用级数展开法研究了方次律单模光纤的色散特性,但实际单模光纤由于制造工艺等方面的原因,它的折射率分布很难用方次律这样简单的解析式表示。此外,在单模色散公式的推导中,一般将色散分成实际很难完全分开的材料色散、波导色散和分布色散;还有的作者将色散分为材料色散、波导色散、小叉积色散和微分材料色散等。加之色散公式的推导近似不同,数学处理方法各异,各自计算的单模光纤色散都不尽相同。

本文定义了光纤的“光学尺寸”这一无量纲参数。众所周知,一根光纤的几何尺寸是一定的,但其光学尺寸却与波长有关;波长越短,光学尺寸越大;波长越长,光学尺寸越小。正是由于单模光纤的光学尺寸  $\rho$  和最大相对折射率差  $\Delta$  随波长变化,其群时延也随波长变化,因此产生色散。根据这一概念,我们推导了新的色散公式。利用这一公式,借助于变分-有限元法和 Sellmeier 系数,就可以计算任意折射率分布的单模光纤的色散。

## 二、新色散公式的推导

我们首先定义光纤的无量纲参数  $\rho$

$$\rho = \left( \frac{2\pi a}{\lambda/n_0} \right)^2 = k^2 n_0^2 a^2, \quad (1)$$

式中  $a$  是光纤芯的几何半径,  $\lambda$  和  $k$  分别是真空中的波长和波数,  $n_0$  是光纤包层折射率。我

们将无量纲参数  $\rho$  称为光纤的“光学尺寸”，其物理意义是：以包层中光波波长为单位量得光纤芯圆周长的平方，或者光纤芯的圆周上能容纳的光波波长数目的平方。一般来说，光波波长越短，则纤维的光学尺寸越大，否则反之。

为了下面计算方便，我们再引进另外两个无量纲参数  $\mu$  和  $\nu$ ，分别定义如下

$$\mu = w^2 = (\beta^2 - k^2 n_c^2) a^2 = \beta^2 a^2 - \rho, \quad (2)$$

$$\nu = v^2 = 2k^2 n_c^2 a^2 \Delta = 2\rho \Delta, \quad (3)$$

式中  $\beta$  和  $w$  分别是轴向传播常数和径向归一化传播常数， $v$  是光纤的归一化频率， $\Delta$  是最大相对折射率差，定义为

$$\Delta = \frac{n_m^2 - n_c^2}{2n_c^2}, \quad (4)$$

式中  $n_m$  是光纤芯中的最大折射率。

由上面的描述很容易想象，由于光纤的光学尺寸  $\rho$  和相对折射率差  $\Delta$  随波长变化，波长不同的光波在这样一个光波导中传播时就会产生色散。由(2)式对  $\lambda$  求导，不难得到群时延  $\tau$  的表达式

$$\tau = - \left. \begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{d\beta}{d\lambda} = - \frac{\lambda^2}{2\pi a c} \left[ \frac{d\rho}{d\lambda} + 2H \left( \Delta \frac{d\rho}{d\lambda} + \rho \frac{d\Delta}{d\lambda} \right) \right] / \sqrt{\rho + \mu}, \\ & H = \frac{d\mu}{d\nu} = \frac{d(w^2)}{d(v^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中  $c$  是真空中的光速，将(5)式再对  $\lambda$  求导数，就可以得到总色散的表达式

$$S = \frac{d\tau}{d\lambda} = S_\rho + S_\Delta + S_x, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} S_\rho &= - \left\{ (1 + 2\Delta H) \frac{d}{d\lambda} \left( \lambda^2 \frac{d\rho}{d\lambda} \right) + \left[ 4\Delta^2 K - \frac{(1 + 2\Delta H)^2}{2(\rho + \mu)} \right] \left( \lambda \frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2 \right\} / (4\pi a c \sqrt{\rho + \mu}), \\ S_\Delta &= - \left\{ \rho H \frac{d}{d\lambda} \left( \lambda^2 \frac{d\Delta}{d\lambda} \right) + \rho^2 \left( 2K - \frac{H^2}{\rho + \mu} \right) \left( \lambda \frac{d\Delta}{d\lambda} \right)^2 \right\} / (2\pi a c \sqrt{\rho + \mu}), \\ S_x &= - \left\{ 2H + \rho \left[ 4\Delta K - \frac{H(1 + 2\Delta H)}{\rho + \mu} \right] \right\} \lambda^2 \frac{d\rho}{d\lambda} \frac{d\Delta}{d\lambda} / (2\pi a c \sqrt{\rho + \mu}), \\ K &= \frac{dH}{d\nu} = \frac{d^2\mu}{d\nu^2} = \frac{d^2(w^2)}{d(v^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

上面公式中  $S_\rho$  是光学尺寸色散，是由于光学尺寸  $\rho$  随波长变化产生的； $S_\Delta$  是分布色散，是由于相对折射率差  $\Delta$  随波长变化形成的；而  $S_x$  则为交叉色散，与  $(d\rho/d\lambda)$  和  $(d\Delta/d\lambda)$  的乘积有关，系两者交替作用所致。

### 三、数学处理

由新色散公式(7)可以看到，这些公式中的各参数可以分成两大类：一类包括  $\rho$ 、 $\lambda \frac{d\rho}{d\lambda}$ 、 $\frac{d}{d\lambda} \left( \lambda^2 \frac{d\rho}{d\lambda} \right)$ 、 $\Delta$ 、 $\lambda \frac{d\Delta}{d\lambda}$ 、 $\frac{d}{d\lambda} \left( \lambda^2 \frac{d\Delta}{d\lambda} \right)$ ，这些量可由 Sellmeier 公式推出；另一类有  $\mu$ 、 $\frac{d\mu}{d\nu}$  和  $\frac{d^2\mu}{d\nu^2}$ ，需解标量波动方程求出  $\mu \sim \nu$  关系，即  $w^2 \sim v^2$  的函数关系之后才能确定。下面我们将分别处理。

(1) 由 Sellmeier 公式推导  $\lambda \frac{d\rho}{d\lambda}$ ,  $\frac{d}{d\lambda}(\lambda^2 \frac{d\rho}{d\lambda})$ ,  $\lambda \frac{d\Delta}{d\lambda}$ ,  $\frac{d}{d\lambda}(\lambda^2 \frac{d\Delta}{d\lambda})$  的表达式。

首先,我们将芯中最大折射率  $n_m$  和包层折射率  $n_c$  用 Sellmeier 公式表示出来<sup>[2]</sup>

$$n_c = \left(1 + \sum_{i=1}^3 \frac{a_i \lambda^2}{\lambda^2 - b_i}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n_m = \left(1 + \sum_{i=1}^3 \frac{a_i^* \lambda^2}{\lambda^2 - b_i^*}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

式中  $a_i$ 、 $b_i$  是纯熔凝石英的 Sellmeier 系数,  $a_i^*$  和  $b_i^*$  是掺杂熔凝石英的 Sellmeier 系数,  $\lambda$  是工作波长。根据(8)式,纤维的光学尺寸  $\rho$  及其导数、最大相对折射率差  $\Delta$  及其导数可分别表示如下

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{4\pi a^2}{\lambda^2} \left(1 + \sum_{i=1}^3 \frac{a_i \lambda^2}{\lambda^2 - b_i}\right), & \lambda \frac{d\rho}{d\lambda} &= -\frac{8\pi^2 a^2}{\lambda^2} \left[1 + \sum_{i=1}^3 \frac{a_i \lambda^4}{(\lambda^2 - b_i)^2}\right], \\ \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda^2 \frac{d\rho}{d\lambda}\right) &= -\lambda \frac{d\rho}{d\lambda} + 32\pi^2 a^2 \lambda^2 \sum_{i=1}^3 \frac{a_i b_i}{(\lambda^2 - b_i)^3}, \\ \Delta &= \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{a_i^*}{\lambda^2 - b_i^*} - \frac{a_i}{\lambda^2 - b_i}\right) / \left(1 + \sum_{i=1}^3 \frac{a_i \lambda^2}{\lambda^2 - b_i}\right), \\ \lambda \frac{d\Delta}{d\lambda} &= \frac{\lambda^2}{n_c^2} \left[ (1 + 2\Delta) \sum_{i=1}^3 \frac{a_i b_i}{(\lambda^2 - b_i)^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{a_i^* b_i^*}{(\lambda^2 - b_i^*)^2} \right], \\ \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{2d\Delta}{d\lambda}\right) &= \left[3 + 4 \frac{\lambda^2}{n_c^2} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i b_i}{(\lambda^2 - b_i)^2}\right] \lambda \frac{d\Delta}{d\lambda} - 4 \frac{\lambda^4}{n_c^2} \left[ (1 + 2\Delta) \sum_{i=1}^3 \frac{a_i b_i}{(\lambda^2 - b_i)^3} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^3 \frac{a_i^* b_i^*}{(\lambda^2 - b_i^*)^3} \right], \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(2) 用变分有限元法确定  $\mu$ 、 $H$ 、 $K$ 。

在弱导光纤中,最低阶的 LP<sub>01</sub> 模必须遵从下面的标量波动方程及其边界条件:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr}\right) + [n^2(r)k^2 - \beta^2]R = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{wK'_0(w)}{aK_0(w)} = -\frac{wK_1(w)}{aK_0(w)}, \quad (11)$$

式中  $r$  是径向坐标,  $R(r)$  是光纤中电磁场的径向分布函数,  $K_0$  和  $K'_0$  分别是第二类零阶虚宗量 Bessel 函数及其对宗量的一阶导数,  $K_1$  是第二类一阶虚宗量 Bessel 函数,  $n(r)$  是光纤芯中的折射率分布

$$n(r) = n_c [1 + 2\Delta g(r)]^{\frac{1}{2}} = [n_c^2 + (n_m^2 - n_c^2)g(r)]^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

$$g(r) = \frac{n^2(r) - n_c^2}{n_m^2 - n_c^2}, \quad (13)$$

其中  $g(r)$  是光纤的折射率分布函数,使用归一化的径向坐标  $\hat{r} = \frac{r}{a}$ , 将(12)式代入(10)式中, 并利用(2)、(3)式的定义,则(10)和(11)式分别变为

$$\frac{1}{\hat{r}} \frac{d}{d\hat{r}} \left(\hat{r} \frac{dR}{d\hat{r}}\right) + [\nu g(\hat{r}) - \mu]R = 0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{d\hat{r}} \Big|_{\hat{r}=1} = -\frac{\sqrt{\mu} K_1(\sqrt{\mu})}{K_0(\sqrt{\mu})}. \quad (15)$$

我们作泛函  $I[R]$ , 使

$$I[R] = \int_0^1 \left(\frac{dR}{d\hat{r}}\right)^2 \hat{r} d\hat{r} - \int_0^1 [\nu g(\hat{r}) - \mu] R^2 \hat{r} d\hat{r} + \frac{\sqrt{\mu} K_1(\sqrt{\mu})}{K_0(\sqrt{\mu})} R^2(1). \quad (16)$$

不难证明,使泛函  $I[R]$  取极值的函数  $R(\hat{r})$  将同时满足  $LP_{01}$  模的标量波动方程及其边界条件,即(14)式和(15)式。

依照光纤芯中  $N$  个等距节点上的折射率测量值,我们将芯半径分成  $N$  个等距间隔,第  $i$  个节点上的径向坐标是  $r_i = \frac{i}{N} a$ 。然后,我们在这些区间上定义  $N+1$  个基函数  $\Psi_i(\hat{r})$ :

$$\Psi_0(\hat{r}) = \begin{cases} 1 - N\hat{r} & \text{当 } \hat{r}_0 \leq \hat{r} \leq \hat{r}_1, \\ 0 & \text{当 } \hat{r} > \hat{r}_1, \end{cases}$$

$$\Psi_i(\hat{r}) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \hat{r} \leq \hat{r}_{i-1}, \\ N\hat{r} - (i-1) & \text{当 } \hat{r}_{i-1} \leq \hat{r} \leq \hat{r}_i, \\ (i+1) - N\hat{r} & \text{当 } \hat{r}_i \leq \hat{r} \leq \hat{r}_{i+1}, \\ 0 & \text{当 } \hat{r} > \hat{r}_{i+1}, \end{cases} \quad (i=1, 2, 3, \dots, N-1)$$

$$\Psi_N(\hat{r}) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \hat{r} < \hat{r}_{N-1}, \\ N\hat{r} - (N-1) & \text{当 } \hat{r}_{N-1} \leq \hat{r} \leq \hat{r}_N, \\ 0 & \text{当 } \hat{r} > \hat{r}_N, \end{cases}$$

式中  $\hat{r}$  是归一化的径向坐标,  $\hat{r}_i$  是第  $i$  个节点的归一化径向坐标,即

$$\hat{r} = \frac{r}{a}, \quad \hat{r}_i = \frac{r_i}{a} = \frac{i}{N}, \quad (18)$$

基函数族  $\{\Psi_i(\hat{r})\}$  的形状示于图 1。

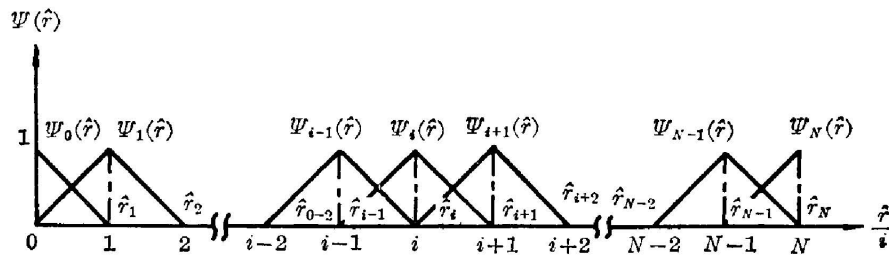


图1 各  $\Psi_i(\hat{r})$  随  $\hat{r}$  的变化

Fig. 1 Various  $\Psi_i(\hat{r})$  vs.  $\hat{r}$

将  $R(\hat{r})$  和  $g(\hat{r})$  分别按基函数族  $\{\Psi_i(\hat{r})\}$  展开,有

$$R(\hat{r}) = \sum_{i=0}^N R_i \Psi_i(\hat{r}), \quad g(\hat{r}) = \sum_{i=0}^N g_i \Psi_i(\hat{r}). \quad (19)$$

由(17)式和图 1 可以看出当  $\hat{r} = \hat{r}_i$  时,  $\Psi_i(\hat{r}_i) = 1$ , 其余基函数  $\Psi_{j+i}(\hat{r}_i) = 0$ 。因此,由(19)式可以得到

$$R_i = R(\hat{r}_i), \quad g_i = g(\hat{r}_i) = \frac{n^2(\hat{r}_i) - n_s^2}{n_m^2 - n_s^2}, \quad (20)$$

这就是说,  $g(\hat{r})$  的展开式中第  $i$  个基函数  $\Psi_i(\hat{r})$  的系数  $g_i$  正好是分布函数在第  $i$  个节点上的值,对  $R(\hat{r})$  也一样。

将(19)式代入(16)式中,并根据泛函  $I[R]$  的极值条件

$$\left\{ \frac{\partial I[R]}{\partial R_i} \right\} = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, N), \quad (21)$$

我们可以得到  $N+1$  阶的线性方程组, 并写成如下的矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_1 & B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & A_2 & B_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & B_{N-1} & A_{N-1} & B_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_N & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{N-1} \\ R_N \end{pmatrix} = 0, \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1 - [(3g_0 + 2g_1)\nu - 5\mu] / 30N^2, \\ A_i &= 4i - \{[(5i-2)g_{i-1} + 30ig_i + (5i+2)g_{i+1}]\nu - 40i\mu\} / 30N^2, \\ &\quad (i=1, 2, 3, \dots, N-1) \\ A_N &= 2N - 1 - \{[(5N-2)g_{N-1} + 3(5N-1)g_N]\nu \\ &\quad - 5(4N-1)\mu\} / 30N^2 + \frac{2\sqrt{\mu} K_1(\sqrt{\mu})}{K_0(\sqrt{\mu})}, \\ B_i &= 1 - 2i - 1 - \{[(5i-3)g_{i-1} + (5i-2)g_i]\nu - 5(2i-1)\mu\} / 30N^2. \\ &\quad (i=1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

根据变分原理, 当  $N \rightarrow \infty$  时, 由(22)式解出的  $R$  将是满足标量波动方程(10)式的严格解。而当  $N$  有限时, 由上面  $N+1$  阶齐次线性方程组(22)所确定的  $R_i$  作为系数, 按照(20)式所构成的  $R(\hat{r})$  将是满足标量波动方程(14)及其边界条件(15)的近似解。然而, 要使这个  $N+1$  阶齐次线性方程组具有非零解, 这个矩阵方程的系数行列式必须为零, 即

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_1 & B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & A_2 & B_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & B_{N-1} & A_{N-1} & B_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_N & A_N \end{vmatrix} = 0. \quad (24)$$

由(23)式我们看到, 方程(24)中包括  $N$ ,  $\{g_i\}$ ,  $\nu$ ,  $\mu$  等参数。显然,  $N$  是节点数目,  $\{g_i\}$  是各节点上折射率分布函数的值, 这是两个已知量。当  $\nu$  值给定后, 就只有  $\mu = w^2$  是未知量。因此, 解超越方程(24)式就可以得到  $\mu$  和  $\nu$  之间的关系。此外, 利用  $\mu$  对  $\nu$  的数值微商, 就可得到  $H$  和  $K$ 。

#### 四、计算结果和讨论

按照(9)式, 我们首先由  $\alpha$ ,  $\lambda$  和纯熔凝石英的 Sellmeier 系数  $\{a_i\}$ ,  $\{b_i\}$  来计算光纤的光学尺寸  $\rho$  及其导数  $\lambda \frac{d\rho}{d\lambda}$  和  $\frac{d}{d\lambda} \left( \lambda^2 \frac{d\rho}{d\lambda} \right)$ 。然后再由给定的光纤芯部最大掺杂熔凝石英的 Sellmeier 系数  $\{a_i^*\}$  和  $\{b_i^*\}$  求出相对折射率差  $\Delta$  及其导数  $\lambda \frac{d\Delta}{d\lambda}$  和  $\frac{d}{d\lambda} \left( \lambda^2 \frac{d\rho}{d\lambda} \right)$ 。这里需要说明一点, 在  $0 \sim 7.9 \text{ mol\%}$  之间任意掺锗浓度下熔凝石英的 Sellmeier 系数是由文献[2]给出

的几个掺锗浓度下的熔凝石英的 Sellmeier 系数采用三次样条函数插值求得。

知道  $\rho$  和  $\Delta$  后, 由 (3) 式立即可以得到  $\nu$  值。对于给定的折射率分布函数  $\{g_i\}$ , 将算得的  $\nu$  值代入方程 (24) 中, 则它的第一个根正好是我们要求的  $\mu$  值。进而利用数值微商立即能够得到  $H$  和  $K$  值。

将上面所求出的这些值代入 (7) 式及 (6) 式中, 最后可以算出在如上给定条件下的单模光纤的色散。公式 (6) 和 (7) 可用于计算任意柱对称折射率分布单模光纤的色散。

### 1. 计算精度

从下面表 1~表 3 所列的数据可以看出, 本文推导的新色散公式与我们在前文 [3] 中推导的完整色散公式完全等效, 但是新色散公式更加简单明了, 而且具有更为明确的物理意义。对于阶跃单模光纤, 由变分-有限元法计算的  $\mu \sim \nu$  关系与由 LP<sub>01</sub> 模的色散方程 (25) 精确计算的结果是一致的

$$\frac{wK_1(w)}{K_0(w)} - \frac{\sqrt{v^2-w^2}J_1(\sqrt{v^2-w^2})}{J_0(\sqrt{v^2-w^2})} = 0. \quad (25)$$

表 1  $c=2.042 \text{ mol}\%$ ,  $\Delta=0.194\%$ , 半径为  $a$  的阶跃单模光纤在  $\lambda=1.55 \mu\text{m}$  处的色散  $S(\text{ps}/\text{\AA} \cdot \text{km})$

Table 1 The dispersion of step SMOF at  $\lambda=1.55 \mu\text{m}$  when  $c=2.042 \text{ mol}\%$  ( $\Delta=0.194\%$ )

| 方法, 公式             |        | $a(\mu\text{m})$ |        |        |        |        |
|--------------------|--------|------------------|--------|--------|--------|--------|
|                    |        | 1.5              | 2.5    | 3.5    | 4.5    | 4.7    |
| 变分-有限元法 ( $N=40$ ) | 完整色散公式 | 2.1854           | 1.5150 | 1.3018 | 1.5631 | 1.6135 |
|                    | 新色散公式  | 2.1854           | 1.5150 | 1.3018 | 1.5630 | 1.6135 |
| 解超越方程              | 完整色散公式 | 2.1858           | 1.5141 | 1.3019 | 1.5630 | 1.6135 |
|                    | 新色散公式  | 2.1858           | 1.5141 | 1.3019 | 1.5630 | 1.6135 |

表 2  $c=7.9 \text{ mol}\%$ ,  $\Delta=0.85\%$ , 半径为  $a$  的阶跃单模光纤在  $\lambda=1.55 \mu\text{m}$  处的色散  $S(\text{ps}/\text{\AA} \cdot \text{km})$

Table 2 The dispersion of step SMOF at  $\lambda=1.55 \mu\text{m}$  when  $c=7.9 \text{ mol}\%$  ( $\Delta=0.85\%$ )

| 方法, 公式             |        | $a(\mu\text{m})$ |         |        |        |        |
|--------------------|--------|------------------|---------|--------|--------|--------|
|                    |        | 1.6              | 2.0     | 3.0    | 4.0    | 5.0    |
| 变分-有限元法 ( $N=41$ ) | 完整色散公式 | -1.6805          | -0.6340 | 1.3881 | 2.0669 | 2.2739 |
|                    | 新色散公式  | -1.6805          | -0.6340 | 1.3881 | 2.0669 | 2.2739 |
| 解超越方程              | 完整色散公式 | -1.6800          | -0.6335 | 1.3885 | 2.0658 | 2.2718 |
|                    | 新色散公式  | -1.6800          | -0.6335 | 1.3885 | 2.0658 | 2.2718 |

表 3  $c=3.5 \text{ mol}\%$ ,  $\Delta=0.38\%$ , 半径为  $a$  的阶跃单模光纤在  $\lambda=1.30 \mu\text{m}$  处的色散  $S(\text{ps}/\text{\AA} \cdot \text{km})$

Table 3 The dispersion of step SMOF at  $\lambda=1.30 \mu\text{m}$  when  $c=3.5 \text{ mol}\%$  ( $\Delta=0.38\%$ )

| 方法, 公式             |        | $a(\mu\text{m})$ |         |         |        |        |        |
|--------------------|--------|------------------|---------|---------|--------|--------|--------|
|                    |        | 1.0              | 2.0     | 3.0     | 4.0    | 5.0    | 6.0    |
| 变分-有限元法 ( $N=41$ ) | 完整色散公式 | 0.1990           | -1.8069 | -0.6500 | 0.0089 | 0.2758 | 0.3809 |
|                    | 新色散公式  | 0.1990           | -1.8069 | -0.6500 | 0.0089 | 0.2758 | 0.3809 |
| 解超越方程              | 完整色散公式 | 0.2006           | -1.8066 | -0.6490 | 0.0101 | 0.2795 | 0.3815 |
|                    | 新色散公式  | 0.2006           | -1.8066 | -0.6490 | 0.0101 | 0.2795 | 0.3815 |

由上面所列数据可见,当  $N$  取 40 或 41 时,本文对阶跃单模光纤总色散  $S$  的计算结果与精确计算间的最大误差约为  $0.005 \text{ ps}/\text{\AA}\cdot\text{km}$ 。我们预计色散的计算精度还将随着折射率测量点数  $N$  的增加而提高。

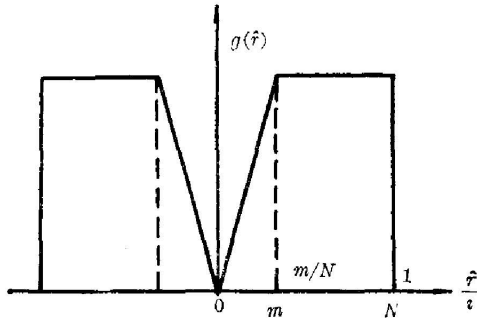


图 2 具有中央凹陷的折射率分布  
Fig. 2 The refractive index profile having the dip at the core center

## 2. 折射率中央凹陷对阶跃单模光纤色散的影响

用 MOVD 法制造的光纤,折射率分布一般都具有中间凹陷的特征,如图 2 所示。图中  $N$  是节点数,  $m$  是表征光纤凹陷宽度的一个整数 ( $m < N$ )。为了考察凹陷对阶跃单模光纤色散的影响,我们假定其折射率分布函数为

$$g(\hat{r}_i) = \begin{cases} i/m & \text{当 } i \leq m, \\ 1 & \text{当 } m < i \leq N. \end{cases} \quad (26)$$

关于中央凹陷对阶跃单模光纤色散的影响示于图 3。由图 3 可见,阶跃单模光纤折射率中间凹陷将使色散增加,但是当  $m/N < 20\%$  时,这种影响很小。其计算和测量结果之间的比较示于表 4。由表 4 可见,本文对极低损单模光纤的计算值与测量结果相当一致,其间的微小差别可能是测量误差、折射率分布的某些缺陷或分布沿轴向的微小变化所致。

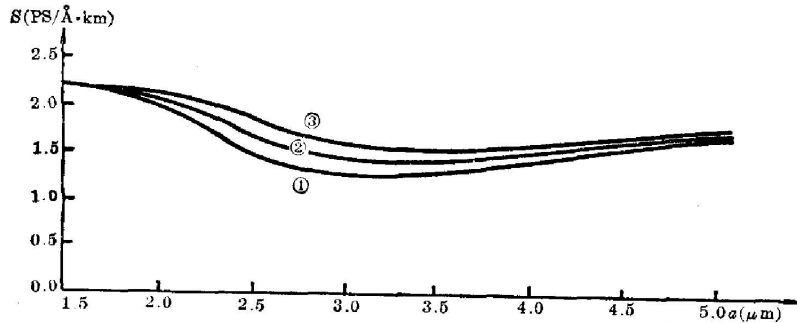


图 3 折射率中央凹陷对阶跃单模光纤色散的影响

Fig. 3 The effects of refractive index dip at the core center on the dispersion of step SMOF ( $c=2.042 \text{ mol}\%$ ,  $\lambda=1.55 \mu\text{m}$ ,  $\Delta=0.194\%$ )

表 4 中央凹陷对极低损阶跃单模光纤色散的影响  
( $\lambda=1.55 \mu\text{m}$ ,  $a=4.7 \mu\text{m}$ ,  $\Delta=0.19\%$ )

Table 4 The effects of the central dip on the dispersion of the lowest-loss step SMOF

| $m/N$                                   | 0     | 25%   | 50%   | 75%   | 测量值 |
|---|-------|-------|-------|-------|-----|
| $S(\text{ps}/\text{\AA}\cdot\text{km})$ | 1.613 | 1.632 | 1.664 | 1.702 | 1.7 |

## 3. 方次律单模光纤的色散

我们对各种方次律单模光纤在波长  $1.3 \mu\text{m}$  和  $1.55 \mu\text{m}$  这两个低损窗口处的色散进行了计算,结果示于图 4 和图 5。图中虚线表示非单模工作区,该处光纤的归一化频率已大于其归一化截止频率。

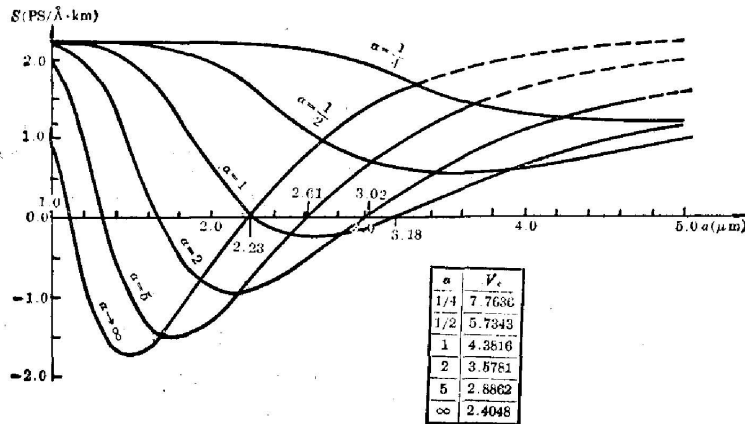


图 4  $\lambda=1.55 \mu\text{m}$  低损“窗口”处各方次律单模光纤的色散随光纤芯半径的变化  
( $c=7.9 \text{ mol}\%$ ,  $\Delta=0.85\%$ )

Fig. 4 The dispersion of power-law SMOF vs. radius at low-loss window,  
 $\lambda=1.55 \mu\text{m}$  ( $c=7.9 \text{ mol}\%$ ,  $\Delta=0.85\%$ )

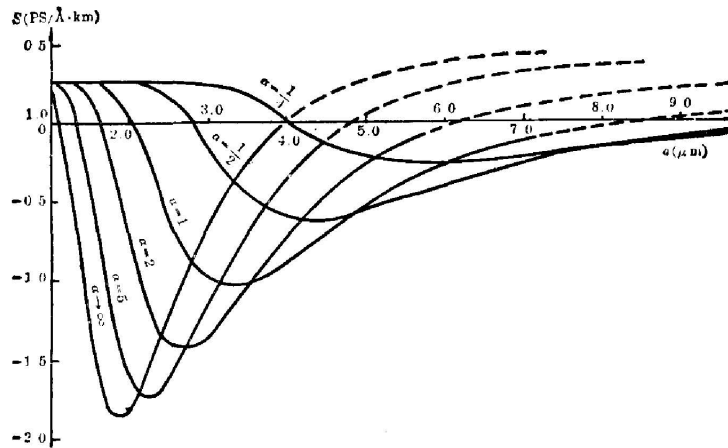


图 5  $\lambda=1.30 \mu\text{m}$  低损“窗口”处各方次律单模光纤的色散随光纤芯半径的变化  
( $c=3.5 \text{ mol}\%$ ,  $\Delta=0.38\%$ )

Fig. 5 The dispersion of power-law SMOF vs. radius at the low-loss window,  
 $\lambda=1.30 \mu\text{m}$  ( $c=3.5 \text{ mol}\%$ ,  $\Delta=0.38\%$ )

由图 4 和图 5 可见,在一定工作波长下,光纤芯部具有同样的最大掺锗浓度时,方次律单模光纤的指数  $\alpha$  越小,则色散曲线随芯半径  $a$  的变化越趋平缓;并且曲线向右上方移动,结果使零色散半径  $a^0$  增大。从图 4 也可以看到,当  $\alpha$  减小到一定程度就得不到零色散半径,例如在  $\Delta=0.85\%$  时,  $\alpha=\frac{1}{2}$  和  $\alpha=\frac{1}{4}$  都不存在零色散半径。

图 4 还表明,在零色散半径附近的色散曲线近乎直线;因此,只要单模光纤的半径控制在零色散半径附近,则单模光纤的色散特性将因各段相互补偿而得到显著改善。



## 五、结 论

本文推导的新色散公式与前文<sup>[3]</sup>给出的完整色散公式一样,可用于计算任意柱对称折射率分布的单模弱导光纤的色散。本文在数学处理上采用变分-有限元法解标量波动方程,据此编制的程序可用来计算实际单模光纤的色散,其计算精度将随着光纤折射率分布的测量点数  $N$  的增加而提高。

对阶跃单模光纤的计算结果表明,用本文给出的新色散公式及变分-有限元法处理所得到的结果与文献[3]中用不同的色散公式和不同的数学处理方法所得到的结果完全一致。此外,我们的计算结果与实验测量结果也很相近。本文给出的方法除可计算单模光纤的色散外,还能用于研究新型光纤,可为单模光纤的设计、制造和测量提供有意义的资料。

本工作得到武汉邮电科学研究院梁嘉卉院长和白崇恩高级工程师的鼓励和支持,谨致谢意。

## 参 考 文 献

- [1] K. Okamoto; *Appl. Opt.*, 1979, **18**, No. 13 (Jul), 2199.
- [2] S. Kobayashi *et al.*; *IOOC'77, Tokyo*, (July, 1979), B8-3.
- [3] 周文俊;《光学学报》,1983, **3**, No. 1 (Jan), 73.
- [4] T. Miya *et al.*; *Electron. Lett.*, 1979, **15**, No. 4 (Feb), 106.
- [5] W. A. Gambling *et al.*; *Electron. Lett.*, 1979, **15**, No. 15 (Aug), 474.
- [6] K. I. White *et al.*; *Electron. Lett.*, 1979, **15**, No. 13 (Jul), 396.

## The dispersion of single mode optical fibers with arbitrary refractive index profiles

ZHOU WENJUN

*(Wuhan Research Institute of Post and Telecommunications)*

(Received 3 May 1983; revised 12 December 1983)

### Abstract

This paper presents a method for calculating the dispersion of single mode optical fibers (SMOF) with arbitrary refractive index profiles. The dimensionless parameter called "optical dimension" of the fiber is introduced, from which a new dispersion formula of SMOF is derived. All the parameters in the formula are calculated by the variation-finite element method<sup>[1]</sup> or with the Sellmeier formula<sup>[2]</sup>. Using program compiled from this calculation, the dispersion curves of SMOF with power-law refractive index profiles have been determined at two low-loss windows, 1.3  $\mu\text{m}$  and 1.55  $\mu\text{m}$ , and the effects of the refractive index dip at the core center on the dispersion in a step index SMOF have been investigated. The method can also be applied to the investigation of new kinds of optical fibers, and for obtaining significant information for the design, fabrication and measurement of SMOF.