

各向异性光腔的偏振特性 及 Stokes 偏振矢量

郭 光 灿

(中国科学技术大学物理系)

提 要

本文采用 Stokes 矢量处理各向异性腔(包括有源和无源腔)的偏振特性。导出在激活介质的增益系数、介电常数和腔的损耗均具有各向异性的情况下, Stokes 偏振矢量的运动方程, 并给出光腔本征偏振态、本征频率和频率裂距的解析表达式。

一、引 言

众所周知, 用 Stokes 参量描述光的偏振状态是相当简便的方法^[1], 这种方法在实际上已经得到日益广泛的应用^[2~4]。与此同时, 人们还研究了若干测量光的 Stokes 参量的办法, 从而进一步增强了 Stokes 参量的实用性。

我们知道, 介质的各向异性是导致在其中传播着的光波改变其偏振状态的原因。如若在某光腔中插进若干各向异性的光学元件, 其本征腔模的偏振状态将会发生变化; 若在气体激光器中加上很小的轴向磁场, 也会造成激活介质增益系数的各向异性。更一般地问, 若一个光腔所含的激活介质的增益、非激活介质的介电常数以及腔的损耗都具有各向异性的特性, 其本征腔模将处于什么样的偏振状态? 而如果已经知道腔的各向异性的特征, 能否方便而准确地描述光场的偏振状态? 本文试图采用 Stokes 参量的方法来回答这类的问题。

二、各向异性光腔中 Stokes 偏振矢量的运动方程

当电场具有两个横向自由度而光腔有着各向异性的特性时, 波动方程为^[5]

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{E}(z, t)}{\partial z^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}(z, t)}{\partial t} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(z, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}(z, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

式中 z 为光腔的轴向, 张量 σ 为各向异性的腔损耗, 能量 ϵ 为无源腔中介质的各向异性特征。假定极化也是各向异性的, 我们引进张量 χ 来描述, 即

$$\mathbf{P}(z, t) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}(z, t), \quad (2)$$

式中 ϵ_0 是真空的介电常数, 在强场作用下, χ 应为电场强度 \mathbf{E} 的函数, 然而, 我们现在仅讨论 χ 与电场无关的线性情况。引进如下电位移矢量

$$\mathbf{D}(z, t) = (\epsilon + \epsilon_0 \chi) \mathbf{E}(z, t)。 \quad (3)$$

在驻波场合, \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 可表示为

$$\mathbf{E}(z, t) = [E_x(t)\mathbf{i} + E_y(t)\mathbf{j}]e^{-i\omega t} \sin kz, \quad (4)$$

$$\mathbf{D}(z, t) = [D_x(t)\mathbf{i} + D_y(t)\mathbf{j}]e^{-i\omega t} \sin kz, \quad (5)$$

其中 $E_i(t)$ 和 $D_i(t)$ 为时间的缓变函数 ($i=x, y$), 因此波动方程变为

$$k^2 \mathbf{E}(z, t) + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}(z, t)}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}(z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

令 $b(t) = \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix}$, $d(t) = \begin{pmatrix} D_x(t) \\ D_y(t) \end{pmatrix}$ 。则有

$$d(t) = \epsilon' b(t), \quad (7)$$

其中 $\epsilon' = \epsilon + \epsilon_0 \chi = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}$ 。我们定义

$$\epsilon' = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon} & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_{xx} & \tilde{\epsilon}_{xy} \\ \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{yy} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

选择实数 $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$ 使得

$$\operatorname{Re} \tilde{\epsilon}_{xx} = -\operatorname{Re} \tilde{\epsilon}_{yy}, \quad (9)$$

其中 $\tilde{\epsilon}_{xy}$ 可以是其虚部和实部均为小量的复数。将 (4) 和 (5) 式代进波动方程 (6) 式, 忽略掉诸如 $\ddot{D}_i(t)$ 、 $\ddot{E}_i(t)$ 、 $\sigma_{ij}\dot{E}_i(t)$ 和 $\tilde{\epsilon}_{ij}\dot{E}_i(t)$ 等高阶项, 并令 $\omega^2 = k^2/\bar{\epsilon}\mu_0$, 便可导出如下方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x(t) &= \frac{i\omega}{2\bar{\epsilon}} \left[\left(\tilde{\epsilon}_{xx} + i \frac{\sigma_{xx}}{\omega} \right) \mathbf{i} E_x(t) + \left(\tilde{\epsilon}_{xy} + i \frac{\sigma_{xy}}{\omega} \right) \mathbf{j} E_y(t) \right], \\ \dot{E}_y(t) &= \frac{i\omega}{2\bar{\epsilon}} \left[\left(\tilde{\epsilon}_{yx} + i \frac{\sigma_{yx}}{\omega} \right) \mathbf{i} E_x(t) + \left(\tilde{\epsilon}_{yy} + i \frac{\sigma_{yy}}{\omega} \right) \mathbf{j} E_y(t) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

写成矩阵形式则为

$$\dot{b}(t) = \tilde{\epsilon} b(t), \quad (11)$$

其中等效的介电常数张量 $\tilde{\epsilon}$ 为

$$\tilde{\epsilon} = \frac{i\omega}{2\bar{\epsilon}} \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_{xx} + i \frac{\sigma_{xx}}{\omega} & \tilde{\epsilon}_{xy} + i \frac{\sigma_{xy}}{\omega} \\ \tilde{\epsilon}_{yx} + i \frac{\sigma_{yx}}{\omega} & \tilde{\epsilon}_{yy} + i \frac{\sigma_{yy}}{\omega} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

由于任何 2×2 矩阵都可按照下列形式用两个厄米矩阵来表示, 故有

$$\tilde{\epsilon} = A + iB. \quad (13)$$

而厄米矩阵 A 和 B 又可以作如下展开:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (\tilde{\epsilon}^+ + \tilde{\epsilon}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 U_{\mu} \sigma_{\mu}, \\ B &= \frac{1}{2} i(\tilde{\epsilon}^+ - \tilde{\epsilon}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 V_{\mu} \sigma_{\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中 U_{μ} 和 V_{μ} 为实数, σ_{μ} 为如下的矩阵:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

若已知 $\tilde{\epsilon}$ 为

$$\tilde{\epsilon} = \frac{i\omega}{2\bar{\epsilon}} \begin{pmatrix} \alpha_{xx} + i\beta_{xx} & \alpha_{xy} + i\beta_{xy} \\ \alpha_{yx} + i\beta_{yx} & \alpha_{yy} + i\beta_{yy} \end{pmatrix},$$

则由(13)和(14)式可求得

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= -\frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon} (\beta_{xx} + \beta_{yy}), & V_0 &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy}), \\ U_1 &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon} (\beta_{xx} - \beta_{yy}), & V_1 &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon} (\alpha_{xx} - \alpha_{yy}), \\ U_2 &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon} (\beta_{xy} + \beta_{yx}), & V_2 &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon} (\alpha_{xy} + \alpha_{yx}), \\ U_3 &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon} (\alpha_{xy} - \alpha_{yx}), & V_3 &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon} (\beta_{yx} - \beta_{xy}). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

由此可见, U_μ 和 V_μ 由等效的介电常数张量完全确定。后面我们将讨论无源和有源腔的 $\tilde{\epsilon}$ 表示式。我们同样也可以将 $\tilde{\epsilon}$ 写成用 U_μ 和 V_μ 表示的形式

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U_0 + U_1 + iV_1 & U_2 + V_3 + i(V_2 - U_3) \\ U_2 - V_3 + i(V_2 + U_3) & U_0 - U_1 - iV_1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

由(9)式可知 $V_0 = 0$ 。利用上面的关系式, 方程(11)及其共轭方程分别为

$$\left. \begin{aligned} \dot{b}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 (U_\mu + iV_\mu) \sigma_\mu b(t), \\ \dot{b}^+(t) &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 (U_\mu - iV_\mu) \sigma_\mu b^+(t). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

现在我们定义 Stokes 参量为

$$S_\nu = T_r [b(t)b^+(t)\sigma_\nu] \quad (\nu=0, 1, 2, 3), \quad (19)$$

其中 T_r 代表求矩阵的迹。不难求出 Stokes 参量与电场分量的关系为

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= |E_x(t)|^2 + |E_y(t)|^2, & S_1 &= |E_x(t)|^2 - |E_y(t)|^2, \\ S_2 &= E_x(t)E_y^*(t) + E_x^*(t)E_y(t), & S_3 &= i[E_x^*(t)E_y(t) - E_x(t)E_y^*(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

由(18)和(19)式可推导出 Stokes 参量的运动方程

$$\dot{S}_\nu = T_r [(\dot{b}b^+ + b\dot{b}^+)\sigma_\nu] = \frac{1}{2} T_r \left\{ b(t)b^+(t) \sum_{\mu=0}^3 (U_\mu \{\sigma_\nu, \sigma_\mu\} + iV_\mu [\sigma_\nu, \sigma_\mu]) \right\}, \quad (21)$$

其中 $\{\sigma_\nu, \sigma_\mu\} = \sigma_\nu \sigma_\mu + \sigma_\mu \sigma_\nu$, $[\sigma_\nu, \sigma_\mu] = \sigma_\nu \sigma_\mu - \sigma_\mu \sigma_\nu$ 。对于 $\nu=0$, 则有

$$S_0 = U_0 S_0 + \sum_{m=1}^3 U_m S_m, \quad (22)$$

对于 $\nu=m(m=1, 2, 3)$, 则有

$$S_m = T_r \{ b(t)b^+(t) [U_0 \sigma_m + U_m \sigma_0 - \sum_n \sum_l \epsilon_{mnl} V_n \sigma_l] \}, \quad (23)$$

其中 ϵ_{mnl} 称为完全反对称的克朗内克符号。为了将(22)和(23)式写成更紧凑而直观的形式, 我们定义下列三个矢量:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = -\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

因此, Stokes 参量的运动方程可写成

$$S_0 = U_0 S_0 + \mathbf{U} \cdot \mathbf{S}, \quad (25)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = S_0 \mathbf{U} + U_0 \mathbf{S} + \mathbf{V} \times \mathbf{S}. \quad (26)$$

若令 $\mathbf{s} = \mathbf{S}/S_0$, 则方程(26)将变为

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{U} + U_0 \mathbf{s} + \mathbf{V} \times \mathbf{s}, \quad (27)$$

\mathbf{s} 称为 Stokes 偏振矢量。不难看出 $|\mathbf{s}| = 1$ 。方程 (27) 为各向异性光腔中 Stokes 偏振矢量的运动方程, 它适用于有源、无源和具有各向异性损耗的一般情况。其中矢量 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 由光腔中介质的特性 (由等效介电常数张量 $\tilde{\epsilon}$ 来表征) 所确定。

三、Stokes 矢量的本征偏振态

现在我们来寻找各向异性光腔的本征偏振态。为此必须求解稳态时的 Stokes 矢量运动方程 (27)。在稳态时我们有

$$\left. \begin{aligned} U_0 + \mathbf{U} \cdot \mathbf{s} &= 0, \\ \mathbf{U} + U_0 \mathbf{s} + \mathbf{V} \times \mathbf{s} &= \mathbf{0}_0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

为方便起见, 我们选取如图 1 所示的坐标系, 其中 \mathbf{i} 表示在矢量 \mathbf{V} 的方向 (即 X 轴) 上的单位矢量, \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 分别表示在 Y 、 Z 轴上的单位矢量, 矢量 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 构成平面 OXY 。设 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 的夹角为 θ 。此时有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= U_1 \mathbf{i} + U_2 \mathbf{j} = (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) |\mathbf{U}|, \\ \mathbf{V} &= |\mathbf{V}| \mathbf{i}, \quad \mathbf{s} = s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

因此, 方程 (28) 简化为

$$\left. \begin{aligned} U_0 + U_1 s_1 + U_2 s_2 &= 0, \\ U_1 + U_0 s_1 &= 0, \\ U_2 + U_0 s_2 - |\mathbf{V}| s_3 &= 0, \\ U_0 s_3 + |\mathbf{V}| s_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

设 $U_0 \neq 0$, 并令 $k_1 = |\mathbf{U}|/U_0$, $k_2 = |\mathbf{V}|/U_0$, 则有

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -U_1/U_0 = -k_1 \cos \theta, \\ s_2 &= -\frac{U_0 U_2}{|\mathbf{V}|^2 + U_0^2} = -\frac{k_1 \sin \theta}{1 + k_2^2}, \\ s_3 &= \frac{|\mathbf{V}| U_2}{|\mathbf{V}|^2 + U_0^2} = \frac{k_1 k_2 \sin \theta}{1 + k_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

将上述结果代到方程 (30), 则得到在各向异性光腔中, 光场达到稳定的条件是

$$\cos \theta = \pm \frac{1}{k_1 k_2} \sqrt{1 + k_2^2 - k_1^2} = \pm q \quad (q \geq 0), \quad (32)$$

而且由于 $q \leq 1$, 故还要求

$$k_1 k_2 \geq 1 + k_2^2 - k_1^2 \geq 0. \quad (33)$$

可见, 只有当矢量 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 的夹角 θ 以及它们的绝对值满足 (32) 和 (33) 式时, 光场才可能达到稳定。当然, 若 $\dot{S}_0 = 0$, 但 $\dot{\mathbf{s}} \neq \mathbf{0}$, 这时在腔的任何截面上, 总电场的振幅是稳定的, 但电场的偏振状态随着时间而变化, 此时 Stokes 偏振矢量将按照方程 (27) 而在 Poincare 球面上运动。当电场偏振状态也稳定时, Stokes 偏振矢量将指向 Poincare 球面上的某固定点, 该点的具体位置取决于 k_1 、 k_2 和 θ 的值。当 k_1 和 k_2 满足不等式 (33) 时, θ 角有四个值可使光场的偏振达到稳定。

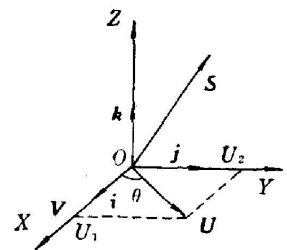


图 1 笛卡尔坐标
Fig. 1 Cartesian
coordinates

$$\theta_1 = \cos^{-1} q, \quad \theta_2 = \pi + \theta_1, \quad \theta_3 = -\theta, \quad \theta_4 = \pi - \theta_3.$$

不难看出, 对应于 θ_1 和 θ_2 的偏振态彼此正交, 而对应于 θ_3 和 θ_4 的偏振态相互正交。由于电场只有两个正交偏振态是独立, 其它的偏振态均可通过这两个正交态来表示, 因此, 我们有理由仅取一对正交偏振态(如 θ_1 和 θ_2)作为本征态, 故本征的 Stokes 偏振矢量为

$$\mathbf{s}^{(1)} = \begin{pmatrix} -k_1 \cos \theta_1 \\ -\frac{k_2 \sin \theta_1}{1+k_2} \\ \frac{k_1 k_2 \sin \theta_1}{1+k_2^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(2)} = -\mathbf{s}^{(1)}. \quad (35)$$

四、电场的本征偏振态和频率裂距

由 Stokes 矢量的本征偏振态不难求出电场的偏振本征矢量 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 。为简化起见, 设

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} e^{-i\theta_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} e^{-i\theta_1} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

其中 e_{ix} 和 e_{iy} 均为实数($i=1, 2$)。根据 Stokes 参量的定义式(20)和本征态(35), 可以求得

$$\left. \begin{aligned} e_{ix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+s_1^{(i)}}, & e_{iy} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1-s_1^{(i)}}, \\ e^{-i\theta_1} &= \frac{1}{\sqrt{1-(s_1^{(i)})^2}} (s_2^{(i)} - i s_3^{(i)}). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

而且有 $\mathbf{e}_i^+ \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, 由于 $\mathbf{s}^{(1)} = -\mathbf{s}^{(2)}$, 则有 $e_{1x} = e_{2y} = a$, $e_{2x} = e_{1y} = b$, $\theta_2 = \theta_1 - \pi$ 。因此, 电场的正交本征偏振矢量分别为

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -a e^{-i\theta} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

现在我们求不同本征偏振态的本振频率。为此引进矩阵 Q

$$Q = \begin{pmatrix} e_{1x}^* & e_{1y}^* \\ e_{2x}^* & e_{2y}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b e^{i\theta} \\ b & -a e^{i\theta} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

不难证明 $Q^+ Q = 1$, 即 Q 为么正矩阵。利用(39)式的变换可将方程(11)变为

$$\dot{B}(t) = Q \tilde{\epsilon} Q^+ B(t), \quad (40)$$

其中

$$B(t) = \begin{pmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \end{pmatrix} = Q b(t), \quad (41)$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}) Q^+. \quad (42)$$

方程(40)是电场在以(42)式为基矢的表象中的运动方程。我们的目的是在稳态下求出本征偏振态的本征频率, 为此必须求解(40)式的如下特征根方程

$$|Q \tilde{\epsilon} Q^+ - \lambda \sigma_0| = Q |\tilde{\epsilon} - \lambda \sigma_0| Q^+ = 0. \quad (43)$$

因为特征根在么正变换下不变, 上式实际上应为

$$|\tilde{\epsilon} - \lambda \sigma_0| = 0. \quad (44)$$

利用(17)式不难求得

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(U_0 \pm i\sqrt{|V|^2 - |U|^2 - 2iV \cdot U}). \quad (45)$$

令 $X = |V|^2 - |U|^2$, $Y = -2iV \cdot U$, $\rho e^{i\varphi/2} = \sqrt{X + iY}$ 。则有 $\rho = (X^2 + Y^2)^{1/4}$, $\varphi = \text{tg}^{-1}(Y/X)$ 。因此

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left\{U_0 \pm i\rho\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} \pm n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} \pm n\pi\right)\right]\right\} \quad (n=0, \pm 1), \quad (46)$$

故电场 $\mathbf{E}(z, t)$ 由下式给出

$$\mathbf{E}(z, t) = [e_1 E_1(0)e^{-i\omega_1 t} + e_2 E_2(0)e^{-i\omega_2 t}] \sin kz, \quad (47)$$

其中 $E_i(0)$ 为稳态时偏振为 e_i 的电场分量的振幅。本征频率分别为

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega - \text{Im} \lambda_+ = \omega + (\rho/2) \cos(\varphi/2), \\ \omega_2 &= \omega - \text{Im} \lambda_- = \omega - (\rho/2) \cos(\varphi/2). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

因此正交本征偏振的频率裂距为

$$\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| = \rho |\cos(\varphi/2)|. \quad (49)$$

五、无源腔的偏振特性

我们将上述的一般性结果应用到无源无损耗的光腔中。此时，等效电介常数张量 ϵ 为

$\tilde{\epsilon} = \frac{i\omega}{2\epsilon} \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_{xx} & \tilde{\epsilon}_{xy} \\ \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{yy} \end{pmatrix}$ 。能量守恒要求 $\begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_{xx} & \tilde{\epsilon}_{xy} \\ \tilde{\epsilon}_{yx} & \tilde{\epsilon}_{yy} \end{pmatrix}$ 为厄米矩阵，即

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{xx} &= \epsilon_{xx}, & \tilde{\epsilon}_{yy} &= \epsilon_{yy} = -\epsilon_{xx}, \\ \tilde{\epsilon}_{xy} &= \epsilon_{xy} + i\rho_{xy} = \tilde{\epsilon}_{yx}^* \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

其中 ϵ_{xx} , ϵ_{xy} 和 ρ_{xy} 均为实数，因此 $\tilde{\epsilon}^{\dagger} = -\tilde{\epsilon}$ 。由此可求出

$$\left. \begin{aligned} U_{\mu} &= 0 \quad (\mu=0, 1, 2, 3), \\ \mathbf{V} &= -\frac{\omega}{\epsilon} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{xy} \\ -\rho_{xy} \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

基本方程 (25) 和 (27) 变为

$$\dot{S}_0 = 0, \quad (52)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{V} \times \mathbf{s}. \quad (53)$$

可见 Stokes 偏振矢量遵从 Bloch 运动方程。矢量 \mathbf{V} 表征着无源腔各向异性的特性，我们可以证明， \mathbf{V} 的各分量分别等效于介质的双折射和旋光特性。

众所周知，Poincaré 球面可用来形象地描述电场的偏振状态。这里我们可用同一个笛卡尔直角坐标系来表示矢量 \mathbf{V} ，只要矢量 \mathbf{V} 的三个分量分别在三个坐标轴上(如图 2 所示)。对于某确定的光腔， \mathbf{V} 是确定的。方程 (53) 表明，在腔中任何截面上的 Stokes 偏振矢量，总是围绕着 \mathbf{V} 在球面上旋转，其旋转频率为 $|\mathbf{V}|$ 。下面我们来证明，这个旋转频率恰好等于无源腔中

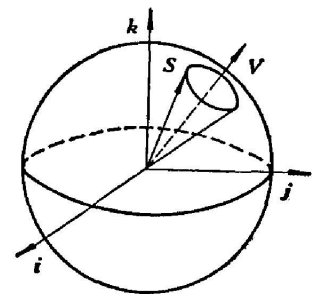


图 2 Poincaré 球
Fig. 2 Poincaré sphere

两个正交本征偏振态之间的频率裂距。

根据(36)和(37)式,很容易求出 Stokes 矢量的本征态

$$\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|, \quad \mathbf{s}^{(2)} = -\mathbf{V}/|\mathbf{V}|, \quad (54)$$

相应的电场本征偏振矢量为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} [1 + (\epsilon_{xx}/\rho_0)]^{1/2} \\ -[1 - (\epsilon_{xx}/\rho_0)]^{1/2} (\tilde{\epsilon}_{xy}/|\tilde{\epsilon}_{xy}|) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} [1 - (\epsilon_{xx}/\rho_0)]^{1/2} \\ [1 + (\epsilon_{xx}/\rho_0)]^{1/2} (\tilde{\epsilon}_{xy}/|\tilde{\epsilon}_{xy}|) \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

其中 $\rho_0 = (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \rho_{xy}^2)^{1/2}$, $|\tilde{\epsilon}_{xy}| = (\epsilon_{xy}^2 + \rho_{xy}^2)^{1/2}$, 且有 $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ 。此时, $Y=0$, $X=|\mathbf{V}|^2$, $\rho=|\mathbf{V}|$, $\varphi=0$ 。因此,对应于本征偏振态的频率分别为

$$\omega_1 = \omega + (|\mathbf{V}|/2), \quad \omega_2 = \omega - (|\mathbf{V}|/2)。 \quad (56)$$

其频率裂距为

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = |\mathbf{V}| = \omega\rho_0/\bar{\epsilon}_0 \quad (57)$$

腔中的电场由下式给出

$$\mathbf{E}(z, t) = [E_1(0)\mathbf{i}e^{-i\omega_1 t} + E_2(0)\mathbf{j}e^{-i\omega_2 t}] \sin kz, \quad (58)$$

其中 $E_1(0)$ 和 $E_2(0)$ 由初始条件确定。上述结果表明,对于某确定的各向异性光腔,存在两个正交的本征偏振态,它们各自有确定的频率和确定的偏振方向,这两个本征偏振态的频率裂距等于各向异性介质特征矢量 $|\mathbf{V}|$ 的绝对值,也等于 Stokes 偏振矢量 \mathbf{s} 围绕矢量 \mathbf{V} 的旋转频率。只要已知光腔的特征矢量 \mathbf{V} 和光腔中电场的初始条件,由上述公式就能完全确定腔中电场的本征偏振态,偏振方向及其频率,和它们的频率裂距。

六、有源腔的特征矢量

有源腔的各向异性不仅包括各向异性的非激活介质,而且激活介质的增益以及腔的损耗也是各向异性的。根据(12)式,这时等效的介电张量为

$$\tilde{\epsilon} = \frac{i\omega}{\partial\epsilon} [\epsilon + \epsilon_0\chi + (i\sigma/\omega)], \quad (59)$$

其中 ϵ 是非激活介质的介电张量, χ 是增益系数各向异性的量度, σ 为腔的各向异性损耗。平均介电常数 $\bar{\epsilon}$ 由下式给出

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \bar{\epsilon}_P + \bar{\epsilon}_A, \\ \bar{\epsilon}_P &= \text{Re}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})/2, \quad \bar{\epsilon}_A = (\epsilon_0/2) \text{Re}(\chi_{xx} + \chi_{yy}). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

定义各向异性腔的 Q 值为

$$Q_{ij}^{-1} = \sigma_{ij}/\omega \quad (i, j = x, y), \quad (61)$$

因此

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_P & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon'_{xx} & \epsilon_{xy} + i\rho'_{xy} \\ \epsilon'_{xy} - i\rho'_{xy} & -\epsilon_{xx} \end{pmatrix}, \\ \chi &= \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_A & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi'_{xy} & \chi'_{xy} \\ \chi'_{yx} & \chi'_{yy} \end{pmatrix}, \\ \frac{\sigma}{\omega} &= \begin{pmatrix} Q_{xx}^{-1} & Q_{xy}^{-1} \\ Q_{yx}^{-1} & Q_{yy}^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

根据(16)和(24)式不难求出特征矢量 \mathbf{V} 和 \mathbf{U} 分别为

$$\mathbf{V} = -\frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon} \begin{pmatrix} 2\epsilon'_{xx} + \text{Re}(\chi'_{xx} - \chi'_{yy}) \\ 2\epsilon'_{yy} + \text{Re}(\chi'_{xy} + \chi'_{yx}) \\ -[2\rho'_{xy} + \text{Im}(\chi'_{xy} - \chi'_{yx}) + Q_{xy}^{-1} - Q_{yx}^{-1}] \end{pmatrix}, \quad (63)$$

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon} \begin{pmatrix} \text{Im}(\chi'_{xx} - \chi'_{yy}) \\ \text{Im}(\chi'_{xy} + \chi'_{yx}) + Q_{xy}^{-1} + Q_{yx}^{-1} \\ -\text{Re}(\chi'_{xy} - \chi'_{yx}) \end{pmatrix}, \quad (64)$$

$$V_0 = 0, \quad U_0 = -\frac{1}{2} \frac{\omega}{\epsilon} [\text{Im}(\chi'_{xx} + \chi'_{yy}) + Q_{xx}^{-1} + Q_{yy}^{-1}]. \quad (65)$$

上述结果表明, U_0 和矢量 \mathbf{U} 仅取决于增益系数和损耗的各向异性, 而矢量 \mathbf{V} 不仅取决于非激活介质的特性, 而且也与增益和损耗的各向异性有关。换句话说, 后者也会在腔中造成双折射和旋光效应。只要给出激活介质增益特性, 各向异性损耗以及非激活介质的介电常数张量, 就可以求出矢量 \mathbf{V} 和 \mathbf{U} 以及 U_0 。根据前面的公式, 腔中电场的偏振状态原则上就可以完全确定。

本文的部分工作是在加拿大多伦多大学完成的, 对 A. D. May 教授和 J. Sipe 教授的有益讨论深表感谢。

参 考 文 献

- [1] M. Born, E. Wolf; *«Principle of Optics»*, (Pergamon Press, 1975).
- [2] W. H. McMaster; *Amer. J. Phys.*, 1954, **22**, No. 6 (Jun), 351.
- [3] H. Kubo, R. Nagata; *Opt. Commun.*, 1980, **34**, No. 3 (Sep), 306.
- [4] A. F. Fercher, P. F. Steeger; *Opt. Acta*, 1981, **28**, No. 4 (Apr), 443.
- [5] G. R. Boyer, B. F. Lamouroux *et al.*; *Appl. Opt.*, 1979, **18**, No. 8 (15 Apr), 1217.
- [6] A. J. Wojtowiz, H. J. Lozykowski; *Acta Phys. Pol. (A)*, 1978, **A54**, No. 6 (Dec), 887.
- [7] H. G. Berry, G. Gabrielse *et al.*; *Appl. Opt.*, 1977, **16**, No. 12 (15 Jun), 3200.
- [8] M. Sargent III, M. O. Scully *et al.*; *«Laser Physics»*, (Reading, Mass., Addison Wesley, 1974), 183.

Polarization properties of an anisotropic cavity and Stokes polarization vector

GUO GUANGCAN

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

(Received 12 December 1983)

Abstract

Stokes vector has been used to deal with the polarization properties of anisotropic cavities, including both active and passive cavities. The equation of motion of Stokes polarization vector is derived in an anisotropic cavity in which the gain coefficient of active medium, the dielectric coefficient and the loss of cavity all are anisotropic. Analytic expressions for the eigen-states of polarization, eigen-frequencies and frequency splitting are given.