

# Smith-Purcell 型自由电子激光器

陈建文 傅淑芬 张大可

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## 提 要

本文讨论了 Smith-Purcell 型自由电子激光器的工作原理,并研究了空间频率可变光栅对辐射的影响。计算表明,如果采用这种光栅并适当选择工作参数,则可望降低泵浦电流强度阈值,并提高辐射功率。

## 一、引 言

1953年, Smith 和 Purcell<sup>[1]</sup> 用实验方法观察到自由电子掠过光栅表面而发光的现象,后来就把这种辐射称之为 Smith-Purcell 效应。为了弄清其辐射过程,人们进行了许多理论和实验研究工作<sup>[2]</sup>,文献[3]把这种现象解释为电子束产生的衰波,经光栅衍射而成为平面波。并提出了利用这种辐射效应将自由电子能量转变为光频辐射的问题,给出了线电子束及正弦调制电子束的衰波振幅解析表达式。Smith-Purcell 型自由电子激光器与磁 Wiggler 自由电子激光器一样,最主要的特点是可以实现电压调谐,其辐射波长为: $\lambda = d(\beta^{-1} - \cos \theta)$ 。式中  $d$  为光栅间距,  $\beta = v/c$ ,  $v$  为电子速度,  $\theta$  是光束输出方向和光栅法线夹角。从上式可以看出,辐射波长随电子速度而变化。1966年, Rusin 和 Bogomolov<sup>[4]</sup> 在光栅的正对面放置一反射镜和耦合孔,并称之为腔栅管 (orotron), 获得了辐射波长从 0.85 mm ~ 12 mm 的电磁波,近年来,这种 orotron 实验获得了很大的发展<sup>[5]</sup>,但辐射波长仅限于毫米波段。

文献[6]曾讨论了利用 Smith-Purcell 效应作成一行波放大器式的自由电子激光器以及在软 X 射线波段辐射的可能性,由于后者要求泵浦波的强度太高,以致于难以付诸实现。本文旨在研究一个可变光栅空间频率以及精确满足共振条件的 Smith-Purcell 型自由电子激光器,计算结果表明,采用可变间距的光栅,适当选择工作参数,可降低阈值电流强度,提高辐射功率。

## 二、物理模型、辐射功率和阈值电流强度

### 1. 物理模型

当衍射光栅被一单色光照明时,除了衍射以外,还存在着许多表面谐波,少量的低阶表面谐波象衍射波一样传播,其它的在垂直于光栅表面方向迅速衰减,人们把后者称为衰波。衰波的相速低于光速,沿光栅表面传播,因此衰波是一个慢波。自由电子与慢波相互平行传

播,且速度等于或略大于慢波相速度时,则二者将发生强相互作用,自由电子将能量转移给辐射场。

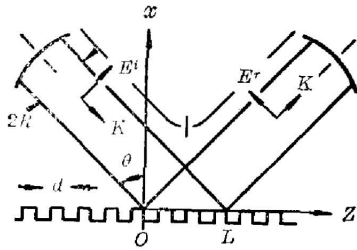


图1 Smith-Purcell 激光器示意图

Fig. 1 Schematic diagram of Smith-Purcell laser

自由电子被慢波俘获的共振条件为:

$$\omega/K_m = \beta c, \quad (1)$$

式中:  $K_m$  为衰波波矢,  $K_m = K(\sin\theta) + (2m\pi/d)$ ,  $\theta$  为待放大光束的入射角,如图1所示。 $K = \omega/c$ ,代入诸量,(1)式成为:

$$\sin\theta + \xi = \beta^{-1}, \quad (2)$$

式中  $\xi = m\lambda/d$ 。

## 2. 辐射功率和阈值电流强度

自由电子和辐射场之间相互作用通常用一维无碰撞的 Boltzman 方程来描述。自由电子进入照明区时,无横向动量,而纵向动量分布用  $f_0(p)$  来描述,为讨论问题方便起见,我们采用冷束近似,即  $f_0(p)$  可用一个  $\delta$  函数来表示:

$$f_0(p') = \delta(p' - p). \quad (3)$$

而分布函数的变化则用  $f_1(p, z, t)$  描述之<sup>[7]</sup>:

$$f_1(p, z, t) = -eE_m \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{\sin(K_m z - \omega t)}{(K_m v - \omega)}, \quad (4)$$

式中  $E_m$  是衰波的振幅。

在照明区,自由电子和辐射场之间交换能量的速率为:

$$p = Ne \int_0^L dz E_m \int_{-\infty}^{\infty} dp' v f_1(p', z, t), \quad (5)$$

式中  $N$  是电子束的线电荷密度,  $e$  是电子电荷。

自由电子在和衰波相互作用过程中,在适当条件下,有可能将动能转换为相干辐射能,因此速度将要降低,那么(2)式所示的共振条件将得不到满足。如果光栅间距随之变化,那么和可变参数磁 Wiggler 情况相似,可望提高自由电子激光器的能量转换效率。

由于光栅间距可变,因此:

$$K_m = \frac{\omega}{c} (\sin\theta + m\lambda\nu), \quad (6)$$

式中  $\nu = 1/d$  是光栅的空间频率:

$$\nu = \nu_0 + \Delta\nu = \nu_0 + K_0 z, \quad (7)$$

式中  $\nu_0$  是恒定空间频率,  $\Delta\nu$  是可变部分,是  $z$  的线性函数,且有:  $\Delta\nu \ll \nu_0$ 。

将(7)式代入(6)式:  $K_m = K_0^0 + \frac{\omega}{c} Fz$ , 式中:  $K_0^0 \equiv \frac{\omega}{c} (\sin\theta + m\lambda\nu_0)$ ,  $F = m\lambda K_0$ 。

则:

$$K_m - \frac{\omega}{v} = a + bz, \quad (8)$$

式中:  $a = K_0^0 - \omega/v$ ,  $b = \omega F/c$ ,

则(5)式成为:

$$p = -Ne^2 E_m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0}{\partial p'} \left[ \int_0^L \frac{\sin(az + bz^2)}{a + bz} dz \right] dp'. \quad (9)$$

将(9)式中方括号内的项  $\sin(az+bz^2)$  和  $1/(a+bz)$  按泰勒级数展开,并取到一级项,则:

$$\int_0^L \frac{\sin(az+bz^2)}{a+bz} dz \approx \int_0^L \left( \frac{1}{a} - \frac{bz}{a^2} \right) (\sin az + bz^2 \cos az) dz,$$

经简单计算:

$$p = \frac{Ne^2 E_m^2 L^3 \omega}{4\gamma m v^2} \frac{\partial}{\partial \eta} F(\eta), \quad (10)$$

$$F(\eta) = \left( \frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 + \frac{bL^2}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\eta^2} - \frac{3}{4\eta^4} \right) \sin 2\eta + \frac{3}{2\eta^3} \cos 2\eta \right\},$$

$$\frac{\partial F(\eta)}{\partial \eta} = g(\eta) + g_1(\eta), \quad (11)$$

式中:  $g(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2,$

$$g_1(\eta) = \frac{bL^2}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left( \frac{1}{\eta^2} - \frac{3}{4\eta^4} \right) \sin 2\eta + \frac{3}{2\eta^3} \cos 2\eta \right\}.$$

$g(\eta)$  是一个对  $\eta=0$  反对称函数,如图 2 所示,  $g_1(\eta)$  则如图 3 所示。

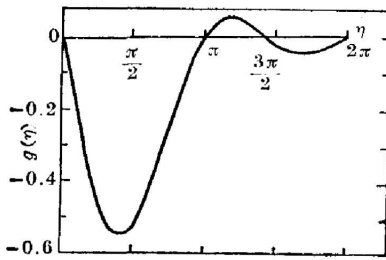


图 2 吸收谱  $g(\eta)$ :  $g(-\eta) = -g(\eta)$

Fig. 2 Absorption spectra

$$g(\eta): g(-\eta) = -g(\eta)$$

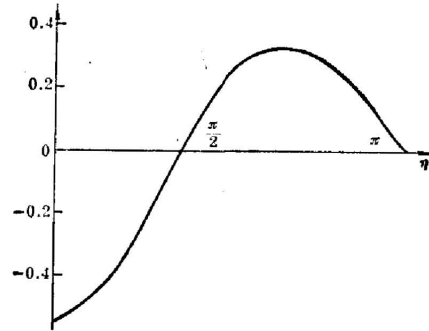


图 3 吸收谱修正项  $g_1(\eta)$  (不包含因子  $bL^2/2$ )

Fig. 3 Correction term  $g_1(\eta)$  to the absorption spectra (except the factor  $bL^2/2$ )

为了将辐射功率和电子束参数以及辐射波长联系起来,将上式进行改写。假定电子束电流为:  $I = Nev$ , 且  $L = 2R/\cos \theta$ ,  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , 入射光强和衰波强度之比为:  $\eta = |E_m|^2/|E|^2$ 。则:

$$p = \frac{4\pi e I R^3 h E^2}{\lambda \gamma m c^2 \beta^3 \cos^3 \theta} (g(\eta) + g_1(\eta)). \quad (12)$$

再将(12)式中的  $\cos \theta$  用  $\xi$  表示,从共振条件知:

$$\sin \theta = \beta^{-1} - \xi,$$

则:  $\cos^2 \theta = (\gamma^2 - 1)^{-1} \{ 2\gamma(\gamma^2 - 1)^{1/2} \xi - (\gamma^2 - 1)\xi^2 - 1 \}.$

令:  $W = 2\gamma(\gamma^2 - 1)^{1/2} \xi - (\gamma^2 - 1)\xi^2 - 1,$

求得:  $p_{\max} = \frac{4\pi e I^* R^3 h E^2 \gamma^2}{\lambda m c^2 W^{3/2}} (g(\eta) + g_1(\eta))_{\max},$

式中  $I^*$  为阈值电流强度。

如果令  $p_{\max}$  等于腔的损耗速率, 即:  $p_{\max} = \omega U/Q$ , 式中:  $U = \epsilon_0 E^2 \pi R^2 l$ ,  $Q$  为腔的品质因素,  $l$  为腔长, 可以求得产生激光放大的阈值电流  $I^*$  为:

$$I^* = \frac{\epsilon_0 \pi m c^3 W^{3/2} l}{2e R \gamma^2 h Q} \cdot \frac{1}{(g(\eta) + g_1(\eta))_{\max}} \quad (13)$$

腔的品质因素:  $Q = 2\pi l / \lambda h$ ,  $I^* \doteq 113 \left( \frac{\lambda}{R \gamma^2} \right) W^{3/2} \frac{1}{(g(\eta) + g_1(\eta))_{\max}}$ 。

如果光栅间距  $d$  恒为常数, 以同样的方法可以求得:

$$P_{\max} = \frac{4\pi e I^* R^3 h E^2 \gamma^2}{\lambda m c^2 W^{3/2}} (g(\eta))_{\max},$$

$$I^* = \frac{\epsilon_0 \pi m c^3 W^{3/2} l}{2e \gamma^2 R h Q} \cdot \frac{1}{(g(\eta))_{\max}} \doteq 210 \left( \frac{\lambda}{R \gamma^2} \right) W^{3/2} \quad (14)$$

### 三、讨 论

(1) 从(12)式可以看出: 当  $g_1(\eta)$  等于零时, 有:

$$P_{\max} = \frac{4\pi e I^* R^3 h E^2 \gamma^2}{\lambda m c^2 W^{3/2}} (g(\eta))_{\max} \quad (15)$$

这正是恒定间距光栅时自由电子的输出功率, 将(12)式与(15)式, (13)式与(14)式相比可以看出, 只要选择合适的  $b$  值, 即可使获得激光放大的电流阈值降低, 并使输出功率增强。显然, 对于较高的  $\gamma$  值, 较长的相互作用距离, 可提高能量转换效率。

(2) 在前面我们曾假定, 电子束的初始动量分布可以用一个  $\delta$  函数描述, 现在我们求出所允许的电子束能量展宽, 从关系式:

$$\eta = \frac{L}{2} \left( K_m - \frac{\omega}{v} \right),$$

求得:

$$d\eta = \frac{\pi L}{\lambda} \frac{d\gamma}{(\gamma^2 - 1)^{3/2}} \quad (16)$$

由于  $0 < \eta < \pi$ , 辐射场才能获得增益, 所以能量展宽的允许值为:

$$\Delta\gamma < \frac{\lambda}{L} (\gamma^2 - 1)^{3/2} \quad (16)$$

从(16)式可以看出: 对于一个确定的  $\gamma$  值, 波长越长, 允许的  $\Delta\gamma$  也越大。

(3) 基于 Smith-Purcell 效应的自由电子激光器的纵模个数, 可由下式确定:  $\Delta M = (l/L)\xi^{-1}$ 。因此, 如果腔长  $l$  比照明区域长度  $L$  不是大得很多, 则激光器可以单模运转。这是其它自由电子激光器所不能比拟的。

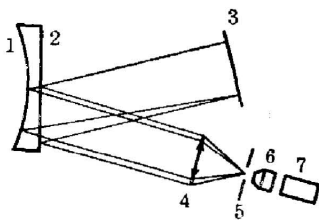


图4 制造可变间距光栅示意图  
Fig. 4 Schematic diagram of making variable period grating

(4) 为了精确地满足共振条件, 我们曾提出采用可变间距光栅, 并且假定了光栅的空间频率  $\nu = K_0 z^{[6]}$ 。这种光栅可用图4所示的方法获得。图中: 1为曲面; 2为平面; 3为全息板; 4为准直透镜; 5为针孔; 6为显微物镜; 7为 He-Ne 激光器。一块柱面镜或平凹镜, 用 He-Ne 激光器作为光源, 镜子的前、后两表面反射波相干, 即可形成这种变间距的干涉条纹。

(5) 本文只考虑衰波的纵向分量, 实际上还包含横向分量  $E_x$  和  $B_y$ , 如果考虑这两个横向分量, 那末相互作用将由 Maxwell 方程、Valev 方程以及电流密度方程联立求解, 这是我们以后进一步的工作。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] S. J. Smith, E. M. Purcell; *Phys. Rev.*, 1953, **92**, No. 4 (Nov), 1069.
- [ 2 ] C. W. Barnes, K. G. Dedrick; *J. A. P.*, 1966, **37**, No. 1 (Jan), 411.
- [ 3 ] 王之江;《中国科学院光学精密机械研究所集刊》(长春), 第一集, 1963, 117.
- [ 4 ] Rusin, G. D. Bogomolov; *JETP Lett*, 1966, **4**, 160.
- [ 5 ] Richard, P. L. *et al.*; *A. P. L.*, 1979, **35**, No. 5 (Sep), 363.
- [ 6 ] J. M. Wachtel; *J. A. P.*, 1979, **50**, No. 1 (Jan), 49.
- [ 7 ] F. A. Hopt, *et al.*; *Opt. Commun*, 1976, **18**, No. 4 (Sep), 413.
- [ 8 ] M. V. B. K. Murfy, *et al.*; *Optical Engineering*, 1979, **18**, No. 5 (Sep), 526.

**Free electron laser using the Smith-Purcell effect**

CHEN JIANWEN FU SHUFEN AND ZHANG DAKE

*(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)*

(Received 26 December 1983)

**Abstract**

In this article, principle of the free electron laser using the Smith-Purcell effect is discussed. Influence of using a grating with variable space frequency upon radiation is studied. The calculation shows that if such a grating is adopted and its operating parameters are selected adequately, the threshold value of pumping electric current intensity is expected to decrease and the radiation power increase.