

# 论二维周期物体的自成象条件

白贵儒 万志民 李 强  
(中国科学技术大学)

## 提 要

本文阐述了二维周期物体 Talbot 自成象条件。理论上证明角度限制  $2R_a R_b \cos \gamma = \text{整数}$ ，并非为必要条件。当周期物体的单胞空间频率交叉项比主频率项小到可忽略的程度时，角度限制失效。这时，任意二维周期物体都可自成象。实验结果与理论分析完全一致。

## 一、前 言

周期物体的自成象效应是 Talbot 于 1836 年发现的。他观察到，周期(或光栅常数)为  $d$  的光栅在单色平面波照射下，不用透镜，可在光栅后面  $2d^2/\lambda$  的整数倍处接收到光栅的实象。最近，Talbot 效应已用于光学信息处理<sup>[1~4]</sup>，引起人们极大关注。

1965 年，Winthrop 和 Worthington 指出<sup>[5]</sup>，在非涅耳近似下，对单胞格矢为  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ ，且  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  夹角为  $\gamma$  的平面周期物体，在波长为  $\lambda$  的单色平面波照射下的自成象距离为  $q = \nu \Omega ab / \lambda$ ，其中， $\nu$  为整数， $a = |\mathbf{a}|$ ， $b = |\mathbf{b}|$ ， $\Omega = 2R_a R_b \sin^2 \gamma$ ， $R_a$  和  $R_b$  是使  $R_a a = R_b b$  成立的最小整数。同时还认为，并不是所有二维周期都可发生自成象效应，仅当基矢夹角  $\gamma$  值满足  $2R_a R_b \cos \gamma = \text{整数}$  的周期物体才能自成象。本文从理论上证明对夹角  $\gamma$  的限制并非必要条件。对多种二维光栅所做的实验证实了理论分析。

## 二、一般性理论

若  $t_c(x, y)$  为单位原胞振幅透过率，则二维周期物体的振幅透过率可写成卷积形式：

$$t(x, y) = t_c(x, y) \otimes \phi(x, y), \quad (1)$$

其中  $\phi(x, y) = \sum_{H, K=-\infty}^{\infty} \delta(x - Ha) \delta(y - Kb)$  为二维周期梳状函数。将  $t(x, y)$  展开成傅里叶级数：

$$t(x, y) = (1/A) \sum_{h, k=-\infty}^{\infty} T(h, k) \exp[-i2\pi(hx/a + ky/b)]. \quad (2)$$

在平面波垂直照明下，由菲涅耳衍射理论可导出周期物后面  $q$  距离处所接收到的振幅分布为<sup>[5]</sup>：

$$g(x, y) = (1/A) \sum_{h, k=-\infty}^{\infty} T(h, k) Z(h, k) \exp[-i2\pi(hx/a + ky/b)], \quad (3)$$

其中,  $A$  为单位原胞面积。作为单位原胞傅里叶变换的  $T(h, k)$  应为:

$$T(h, k) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} t_c(x, y) \exp[i2\pi(hx/a + ky/b)] dx dy. \quad (4)$$

另外有

$$Z(h, k) = \exp\{-i\pi\lambda q(R_a^2 h^2 + R_b^2 k^2 - 2R_a R_b h k \cos \gamma) / R_a R_b a b \sin^2 \gamma\}. \quad (5)$$

比较(2)与(3)式, 要使自成象效应发生, 即有  $g(x, y) = t(x, y)$ , 显然必须对任意整数  $h, k$  满足  $Z(h, k) = 1$ 。如果单位原胞空间频谱中的交叉项不能忽略, 即  $T(h, k)_{h, k \neq 0}$  与  $T(h, k)_{h=0, \text{或} k=0}$  同数量级, 根据  $Z(h, k) = 1$  关系, 必然导致角度限制条件

$$2R_a R_b \cos \gamma = \text{整数}, \quad (6)$$

以及 Talbot 象距公式  $q = \nu \Omega a b / \lambda$ 。其中  $\Omega = 2R_a R_b \sin^2 \gamma$ 。例如对  $a = b$  的菱形原胞, 角度限制(6)导致只能是夹角  $\gamma$  为  $60^\circ$  或  $90^\circ$  的菱形二维周期物体才能自成象。但是, 若单位原胞空间频谱中交叉项可以忽略, 即有

$$|T(h, k)|_{h, k \neq 0} \ll |T(h, k)|_{h=0 \text{ 或 } k=0}, \quad (7)$$

则(2)、(3)式可化为

$$\begin{aligned} t(x, y) &= (1/A) \sum_{h=-\infty}^{\infty} T(h, 0) \exp[-i2\pi h x/a] + (1/A) \sum_{k=-\infty}^{\infty} T(0, k) \exp[-i2\pi k y/b] \\ &\quad + (1/A) \sum_{h, k \neq 0} T(h, k) \exp[-i2\pi(hx/a + ky/b)] \\ &\approx (1/A) \sum_{h=-\infty}^{\infty} T(h, 0) \exp[-i2\pi h x/a] + (1/A) \sum_{k=-\infty}^{\infty} T(0, k) \exp[-i2\pi k y/b], \\ g(x, y) &\approx (1/A) \sum_{h=-\infty}^{\infty} T(h, 0) Z(h, 0) \exp[-i2\pi h x/a] \\ &\quad + (1/A) \sum_{k=-\infty}^{\infty} T(0, k) \cdot Z(0, k) \exp[-i2\pi k y/b]. \end{aligned}$$

此时能发生自成象的条件显然应是同时能满足

$$Z(h, 0) = \exp[-i\pi\lambda q h^2 / (\sin^2 \gamma) a^2] = 1,$$

及

$$Z(0, k) = \exp[-i\pi\lambda q k^2 / (\sin^2 \gamma) a^2] = 1.$$

即 Talbot 象距必同时满足

$$q = \nu 2a^2 \sin^2 \gamma / \lambda, \quad q = \nu' 2b^2 \sin^2 \gamma / \lambda, \quad (8)$$

其中  $\nu, \nu'$  为整数。(8)式意味着  $a = \sqrt{n} b$  或  $b = \sqrt{n} a$ ,  $n$  为整数, 即对单位原胞格矢长度比也有限制。但是对基矢夹角  $\gamma$  无特殊要求。任意夹角都可自成象。

综上所述, 二维周期物体在单色平面波照明下, 能否发生 Talbot 自成象效应, 不仅与周期有关, 而且还与单位原胞空间频谱分布有关。当单位原胞的空间频谱交叉项可忽略时, 基矢夹角  $\gamma$  为任意值都可自成象。

### 三、特 例

选取如图 1 所示的二维菱形光栅, 图中斜线部分表示不透光面,  $n, n'$  为大于 1 的整数, 坐标轴  $x, y$  分别与原胞基矢平行。这时单胞振幅透过率为

$$t_c(x, y) = \begin{cases} 1 & -a/2 < x < -a/2n, \quad -a/2n' < y < a/2n'; \\ & -a/2n < x < a/2n, \quad -a/2 < y < a/2; \\ & a/2n < x < a/2, \quad -a/2n' < y < a/2n'; \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

它的傅里叶变换谱为

$$\begin{aligned} T(h, k) &= \iint_{-a/2}^{a/2} t_c(x, y) \exp[i2\pi(hx/a + ky/a)] dx dy \\ &= \left( \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2n'}^{a/2n'} + \int_{-a/2n}^{a/2n} \int_{-a/2}^{a/2} - \int_{-a/2n}^{a/2n} \int_{-a/2n'}^{a/2n'} \right) \\ &\quad \cdot \exp[i2\pi(hx/a + ky/a)] dx dy \\ &= a^2 [\sin \pi h \sin(\pi k/n') + \sin(\pi h/n) \sin \pi k \\ &\quad - \sin(\pi h/n) \sin(\pi k/n')], \end{aligned}$$

注意到

$$(\sin \pi h) / \pi h = \begin{cases} 1 & h=0, \\ 0 & h \neq 0 \text{ 即 } h = \pm 1, \pm 2, \dots; \end{cases}$$

从而导致

$$\left. \begin{aligned} T(h, 0) &= (a^2/\pi h) (1 - 1/n') \sin(\pi h/n); \\ T(0, k) &= (a^2/\pi k) (1 - 1/n) \sin(\pi k/n'); \\ T(h, k)_{h, k \neq 0} &= - (a^2/\pi^2 h k) \sin(\pi h/n) \sin(\pi k/n'). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

显然有关系

$$\begin{aligned} T(h, 0) &= - [\pi k (1 - 1/n') / \sin(\pi k/n')] T(h, k)_{h, k \neq 0}; \\ T(0, k) &= - [\pi h (1 - 1/n) / \sin(\pi h/n)] T(h, k)_{h, k \neq 0}. \end{aligned}$$

当  $n \gg 1, n' \gg 1$  时,

$$|T(h, 0)| \approx \begin{cases} n' |T(h, k)_{h, k \neq 0}| \gg |T(h, k)_{h, k \neq 0}|, & k \ll n' \\ |(\pi k / \sin(\pi k/n'))| |T(h, k)_{h, k \neq 0}| > \pi k |T(h, k)_{h, k \neq 0}| \gg |T(h, k)_{h, k \neq 0}|, & (k \leq n', k \geq n'); \end{cases}$$

即恒有  $|T(h, 0)| \gg |T(h, k)_{h, k \neq 0}|$ , 同理有  $|T(0, k)| \gg |T(h, k)_{h, k \neq 0}|$ 。根据前述一般性理论, 便可得出结论: 对二维菱形光栅, 只要其透光部分远小于最小周期  $a$ , 即  $n, n' \gg 1$ , 则在距离  $q = \nu 2a^2 \sin^2 \gamma / \lambda$  处可观察到自成象, 对角度  $\gamma$  无限制条件。相反, 当  $n$  和  $n'$  接近于 1 时, 必有

$$\begin{aligned} \lim_{n' \rightarrow 1} |T(h, 0) / T(h, k)_{h, k \neq 0}| &= \lim_{n' \rightarrow 1} |\pi k (1 - 1/n') / \sin(\pi k/n')| \\ &= \lim_{n' \rightarrow 1} |(\pi k/n'^2) / \pi k (\cos \pi k/n') (-1/n'^2)| = 1. \end{aligned}$$

同理有

$$\lim_{n \rightarrow 1} |T(0, k) / T(h, k)_{h, k \neq 0}| = 1.$$

这时(7)式得不到满足, 角度限制条件  $2R_a R_b \cos \gamma = \text{整数}$  将起重要作用。于是, 除  $\gamma = 60^\circ$  和  $90^\circ$  外, 其它情况不能自成象。

二维菱形光栅(透光部分相连通)的负片是二维菱形网络(不透光部分相连通)。除零级谱外, 互补的菱形光栅与菱形网络的频谱分布是相同的, 因此能否自成象的条件也相同。例如  $n, n' \approx 1$  时的菱形光栅的负片就近似于二维周期点阵。由此可知, 二维周期点阵自成象

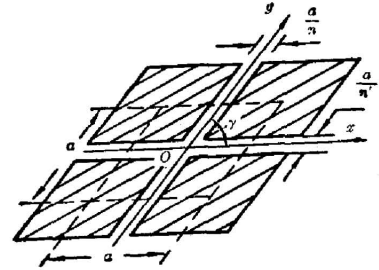


图1 二维菱形光栅的单位原胞  
Fig. 1 Primitive cell for two-dimensional rhomboid grating

应满足角度限制,即除  $\gamma=60^\circ$ 、 $90^\circ$  外,任意夹角的点阵是不能自成象的。

#### 四、实验结果

使用功率 30 mW 的 He-Ne 激光照明自制的光栅,在最近的 Talbot 距离上观察成像结果。光栅常数  $a$  与 Talbot 距离  $q=2a^2 \sin^2 \gamma/\lambda$  都标在相应的图中。波长  $\lambda=6328 \text{ \AA}$ 。图 2 和图 3 为基矢夹角  $\gamma=60^\circ$  和基矢夹角  $\gamma=30^\circ$  的菱形光栅及其频谱分布和 Talbot 自成象。从两个光栅的频谱中可明显看到很强的主谱,相应的交叉谱非常弱。 $\gamma=30^\circ$  的自成象效果很明显,与  $\gamma=60^\circ$  的菱形光栅同样都与物体本身没有什么区别。实验表明角度限制不起作用。

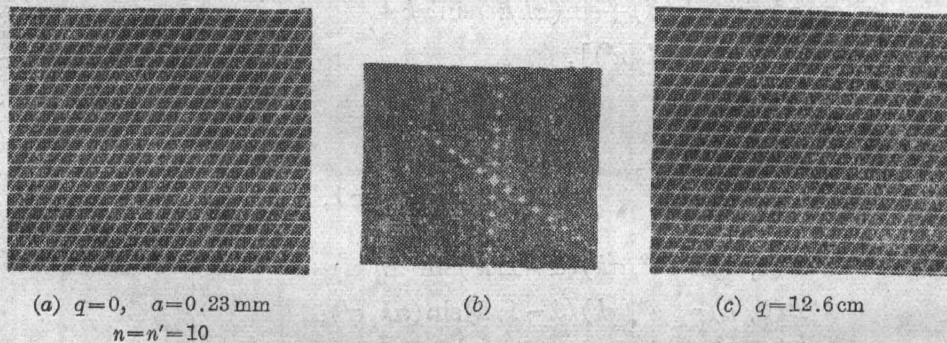


图 2  $\gamma=60^\circ$  的菱形光栅

Fig. 2 The rhombic grating,  $\gamma=60^\circ$

(a) Object; (b) Fourier spectrum; (c) Talbot self-image

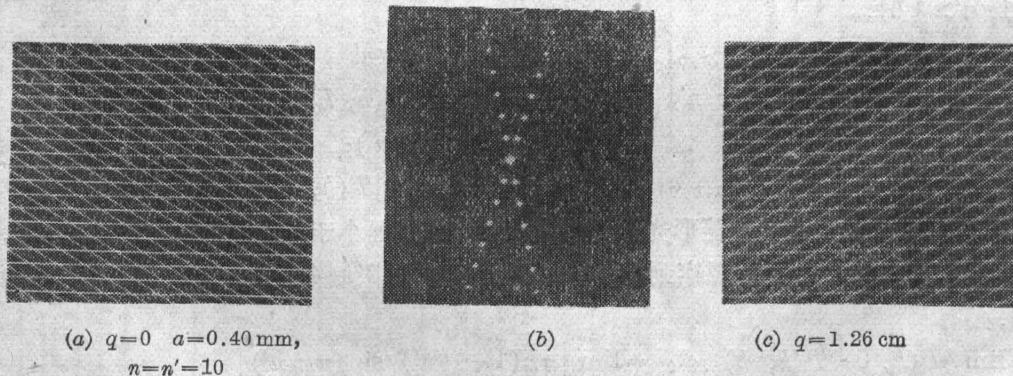
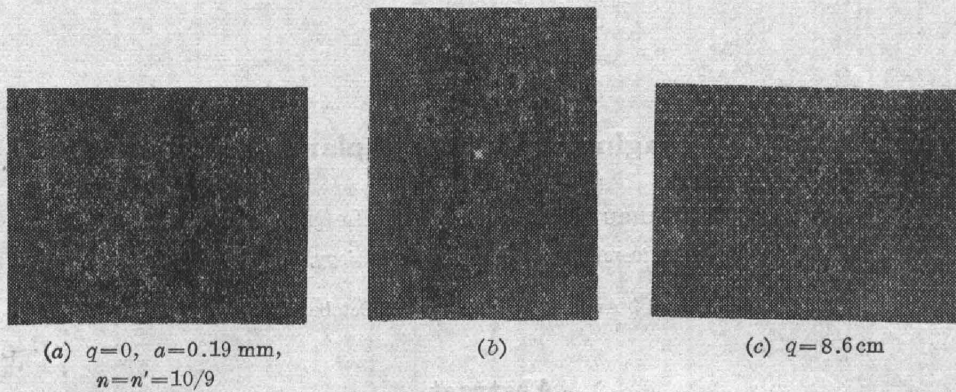


图 3  $\gamma=30^\circ$  的菱形光栅

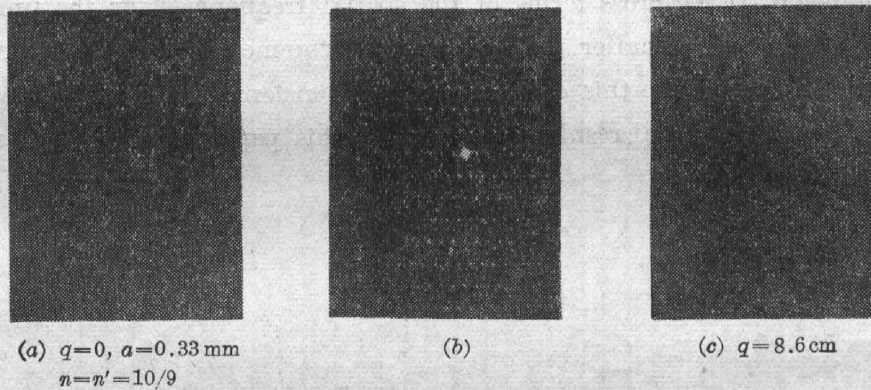
Fig. 3 The rhombic grating,  $\gamma=30^\circ$

(a) Object; (b) Fourier spectrum; (c) Talbot self-image

图 4 和图 5 为基矢夹角  $\gamma=60^\circ$  和基矢夹角  $\gamma=30^\circ$  的二维点阵及其频谱和相应的 Talbot 距离上的象。从频谱分布看,除零级谱外,其它谱点的强度几乎均匀,没有主谱出现。在  $q=2a^2 \sin^2 \gamma/\lambda$  处观察到与理论分析一致的结果。 $\gamma=60^\circ$  的点阵出现良好的自成象,而  $\gamma=30^\circ$  的点阵则无自成象产生。我们还制作了  $\gamma=45^\circ$  以及其它一些  $\gamma$  值的光栅,实验表明与理论分布结果一致,不在此一一列举。

图 4  $\gamma=60^\circ$  的二维点阵Fig. 4 Two-deminsional lattice,  $\gamma=60^\circ$ 

(a) Object; (b) Fourier spectrum; (c) Talbot self-image

图 5  $\gamma=30^\circ$  的二维点阵Fig. 5 Two-deminsional lattice,  $\gamma=30^\circ$ 

(a) Object; (b) Fourier spectrum; (c) Image

## 五、结 论

从以上的理论分析和实验结果表明, 二维周期物体的单位原胞频谱分布对物体的 Talbot 自成象具有重要意义。当原胞空间频谱交叉项可忽略时, 对基矢夹角  $\gamma$  无任何限制。这一点充分说明二维周期物体自成象的角度限制条件  $2R_a R_b \cos \gamma = \text{整数}$  并非必要条件。解决 Talbot 自成象条件无疑将会促进光学信息处理以及其它光学课题的进展。

## 参 考 文 献

- [1] K. Paturski *et al.*; *Nouv. Rev. Opt.*, 1975, **6**, No. 1 (Sep-Oct), 25.
- [2] Donald E. Silva; *Appl. Opt.*, 1972, **11**, No. 11 (Nov), 2613.
- [3] K. Potorski; *Opt. Commun.*, 1979, **29**, No. 1 (Jun), 13.
- [4] 王伟建等;《光学学报》, 1983, **3**, No. 3 (May), 282.
- [5] J. T. Winthrop, *et al.*; *J. O. S. A.*, 1965, **55**, No. 4 (Apr), 373.

## On the talbot self-imaging conditions of plane periodical objects

BAI GUIRU WAN ZHIMING AND LI QIANG

*(China University of Science and Technology, Hefei)*

(Received 3 August 1983; revised 26 October 1983)

### Abstract

The talbot self-imaging conditions of the plane periodical objects are presented. It is proved theoretically that restriction of the angle  $\nu$ ,  $2R_a R_b \cos \gamma = \text{integer}$ , is not a necessary condition. If the cross terms of the spatial frequencies for the unit cell of periodical object are much smaller than the main frequency terms, the restriction of the angle is not necessary. In this case, any two-dimensional periodical object can be self-imaged. The experimental results presented in this paper are in accordance with the theoretical analysis.