

# 光栅编码实现图象衬度反转的理论分析

王书颖 张静江 彭芳麟  
(北京师范大学物理系)

## 提 要

本文对矩形光栅编码图片的衍射零级与其它各级单独所成的象,其衬度能够反转的现象,提出了新的理论分析。该文从振幅相减实现衬度反转的原理出发,对编码片的透过率函数提出了新的物理模型;并用傅里叶分析的方法导出正确的结论,且与实验现象完全符合。

实现黑白图象衬度反转的方法之一是用矩形光栅对图片实行编码。将编码片放入图1所示的成象光路或其它成象光路中。则单独由零级谱斑所成的象与零级以外各级谱斑所成的象(一级或多级),衬度一般是反转的。这一现象早有报道<sup>[1]</sup>,但对这一现象的理论分析尚不够详尽。我们在进行假彩色合成的过程中,对实现衬度反转的条件及原理进行了一系列的实验和研究,提出了一种解释,能较圆满地说明所观察到的实验现象;同时还为由编码负片再翻成正片不能实现衬度反转提供了根据。下面从编码开始对实现衬度反转的条件及其理论提出初步的分析。

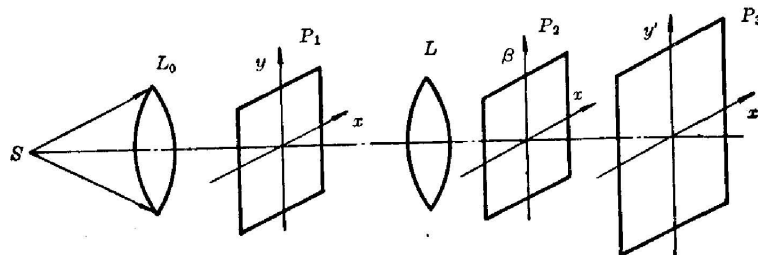


图 1

### 1. 编码:

如图2所示,用密接触或用放大机成象的方法对透明图片实行编码。对感光底片经显影、定影处理后,即得到编码负片。

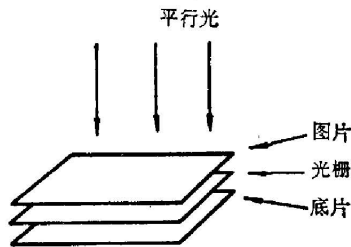


图 2

### 2. 实现衬度反转的条件:

为了说明零级以外各级谱所成的象衬度能够反转,本文提出如下的物理模型和相应的分析。如图3所示,(a)表示待编码片的透射光强分布。为简单起见,设其是一维的。(b)表示矩形光栅的透射光强分布。它是沿 $x$ 轴分布的明暗相间的条纹。(c)表示两者重叠时(编码状态)的透射光强分布。它是两种强度不等,但分布情况类似的图形(即两个经光栅透过率调制的光强分布)。其强

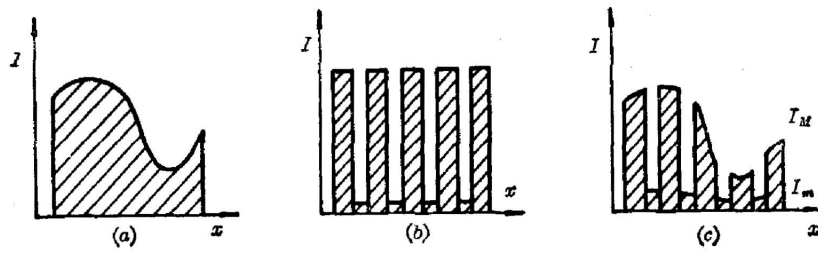


图 3

度大小与光栅明暗纹的透过率有关。我们用  $I_M(x)$  及  $I_m(x)$  表示。

图 4 是底片的感光特性曲线。横轴为曝光量的对数，纵轴为底片的相应密度。当曝光量  $E$  满足  $E_1 < E < E_2$  时，密度  $D$  与  $\log E$  成线性关系；当  $E < E_1$  或  $E > E_2$  时，密度在一定范围内保持不变。

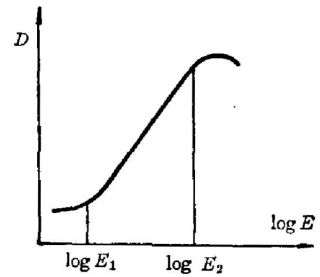


图 4

编码时，由于各种透明图片的反差不同以及曝光量的不同，可在编码片上形成不同密度的图象，大致可分为两个类型。

(1) 待编码图片的反差不太大，曝光量也合适，能满足  $E_1 < I_M t < E_2$ 。且近似地有  $I_m t \leq E_1$ ，如图 5(a) 所示。经冲洗后，得编码片的密度分布，如图 5(b) 所示。其中由  $I_m t$  形成的密度分布基本相同，近于灰雾密度；而由  $I_M t$  形成的密度分布才较准确地反映了原图片的光强分布状况。

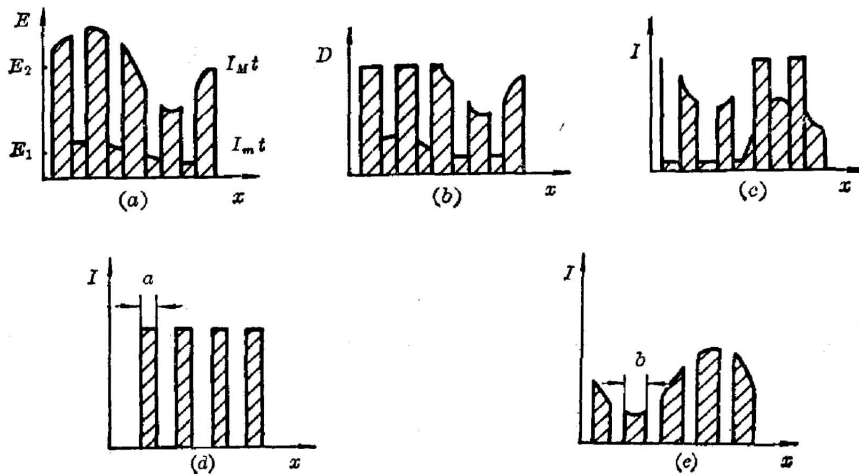


图 5

此编码片的透射光强分布如图 5(c) 所示。它可看成是图 5(d) 和 5(e) 两种强度分布的和。其中 5(d) 是矩形光栅的强度分布，它提供图象的亮背景；图 5(e) 是被矩形光栅调制的编码片上图象的光强分布。因此，图 5(c) 所示的编码片的光强透过率函数可写成如下形式：

$$I(x) = t^2(x) + [t_1(x) \cdot \varphi(x)]^2, \tag{1}$$

$$t(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x}{d}\right), \tag{2}$$

$$t_1(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{b}\right) * \frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x+d/2}{d}\right). \quad (3)$$

$\varphi(x)$  为编码片上图象的振幅透过率。(2)、(3)式中的  $a$ 、 $b$  分别表示图 5(d)、5(e) 中两种矩形光栅明纹的宽度,  $d$  为光栅常数, 且  $a+b=d$ 。即两种光栅常数相同, 明暗纹的宽度刚好互换。由于

$$\begin{aligned} t(x) \cdot t_1(x) &= \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x}{d}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{x}{b}\right) * \frac{1}{d} \text{comb}\left[\frac{x+(d/2)}{d}\right] \\ &= \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \sum_n \delta(x-nd) \cdot \sum_n \delta[x+(d/2)-nd] * \text{rect}\left(\frac{x}{b}\right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

(因为两  $\delta$  函数  $\delta[x+(d/2)-nd]$  及  $\delta(x-nd)$  不能同时取值) 所以编码片的振幅透过率为:

$$t(x) + t_1(x) \cdot \varphi(x). \quad (5)$$

若此编码片的宽度为  $c$ , 将其放到图 1 所示的傅氏透镜  $L$  前距离为  $d$  处的  $P_1(x, y)$  面上 ( $d > f$ )。照明光源可用白光点光源再加以准直 (亦可用相干光源)。本文为推导方便起见, 设照明光是波长为  $\lambda$ 、振幅为 1 的单色平行光, 则编码片后的光场分布为:

$$\Phi(x) = \left\{ \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x}{d}\right) \right] + \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{b}\right) * \frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x+d/2}{d}\right) \cdot \varphi(x) \right] \right\} \cdot \text{rect}\left(\frac{x}{c}\right), \quad (6)$$

在  $L$  的后焦面,  $P_2(\alpha, \beta)$  面上的复振幅分布为:

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[i\frac{k}{2f}\left(1-\frac{d}{f}\right)(\alpha^2+\beta^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x\alpha+y\beta)\right] dx dy$$

或写成

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[i\pi\lambda f\left(1-\frac{d}{f}\right)(\xi^2+\eta^2)\right] \cdot F(\xi), \quad (7)$$

式中  $\xi = \frac{\alpha}{\lambda f}$ ,  $\eta = \frac{\beta}{\lambda f}$  为空间频率坐标;  $\alpha, \beta$  为位置坐标。

$$F(\xi) = \mathcal{F}[\Phi(x)]$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\right] \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x}{d}\right)\right] \right\} \otimes \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{c}\right)\right] \\ &+ \left\{ \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{b}\right)\right] \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x+d/2}{d}\right)\right] \otimes \mathcal{F}[\varphi(x)] \right\} \otimes \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{c}\right)\right], \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\right] &= a \sin c(a\xi), \\ \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{b}\right)\right] &= b \sin c(b\xi), \\ \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{c}\right)\right] &= c \sin c(c\xi), \\ \mathcal{F}\left[\frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x}{d}\right)\right] &= \text{comb}(d\xi) = \frac{1}{d} \sum_n \delta\left(\xi - \frac{n}{d}\right), \\ \mathcal{F}\left[\frac{1}{d} \text{comb}\left(\frac{x+d/2}{d}\right)\right] &= \frac{1}{d} \sum_n \delta\left(\xi - \frac{n}{d}\right) \cdot e^{in\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将(9)式代入(8)式, 得并经卷积的互易性及其定义可整理成

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &= \frac{ac}{d} \int \sin c(cu) \cdot \sin c[a(\xi-u)] \cdot \sum_n \delta\left(\xi - \frac{n}{d} - u\right) du \\
 &\quad + \left\{ \frac{bc}{d} e^{in\pi} \int \sin c(cu) \cdot \sin c[b(\xi-u)] \cdot \sum_n \delta\left(\xi - \frac{n}{d} - u\right) du \right\} \otimes \mathcal{F}[\varphi(x)] \\
 &= \frac{ac}{d} \sum_n \sin c\left(\frac{na}{d}\right) \cdot \sin c\left[c\left(\xi - \frac{n}{d}\right)\right] \\
 &\quad + \frac{bc}{d} e^{in\pi} \sum_n \sin c\left(\frac{nb}{d}\right) \cdot \sin c\left[c\left(\xi - \frac{n}{d}\right)\right] \otimes \mathcal{F}[\varphi(x)]. \quad (10)
 \end{aligned}$$

将(10)式代入(7)式,且使其中的  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 就得到零级,  $\pm 1$  级,  $\pm 2$  级……频谱的复振幅分布。

在  $P_2$  面放狭缝,其透过率为:

$$T(\xi) = \begin{cases} 1 & (|\xi| < 1/c \text{ 或 } |\alpha| < \lambda f/c \text{ 时}), \\ 0 & (\xi \text{ 为其它值时}). \end{cases} \quad (11)$$

只允许某一级频谱通过,则缝后的光场分布为:

$$\begin{aligned}
 \Psi_n(\xi) &= \Psi(\xi) \cdot T(\xi) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[i\pi\lambda f\left(1 - \frac{d}{f}\right)(\xi^2 + \eta^2)\right] \\
 &\quad \cdot \left\{ \frac{ac}{d} \sin c\left(\frac{na}{d}\right) \cdot \sin c\left[c\left(\xi - \frac{n}{d}\right)\right] + \frac{bc}{d} e^{in\pi} \cdot \sin c\left(\frac{nb}{d}\right) \cdot \sin c\left[c\left(\xi - \frac{n}{d}\right)\right] \right\} \\
 &\quad \otimes \mathcal{F}[\varphi(x)] = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[i\pi\lambda f\left(1 - \frac{d}{f}\right)(\xi^2 + \eta^2)\right] \cdot F_n(\xi). \quad (12)
 \end{aligned}$$

设频谱面到象面满足菲涅耳衍射,其距离为  $z$ , 则由频谱中某一级单独衍射到象面的复振幅分布为(式中略去常位相因子  $e^{ikz}$ ):

$$\begin{aligned}
 \Psi'_n(x') &= \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[i\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)\right] \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(\xi) \exp\left[i\frac{\pi\lambda f^2}{z}(\xi^2 + \eta^2)\right] \\
 &\quad \cdot \exp\left[-i\frac{2\pi f}{z}(\xi x' + \eta y')\right] d\xi d\eta (\lambda f)^2. \quad (13)
 \end{aligned}$$

将(12)式代入(13)式得:

$$\begin{aligned}
 \Psi'_n(x') &= \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[i\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)\right] \\
 &\quad \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[i\pi\lambda f\left(1 - \frac{d}{f}\right)(\xi^2 + \eta^2)\right] \cdot F_n(\xi) \cdot \exp\left[i\frac{\pi\lambda f^2}{z}(\xi^2 + \eta^2)\right] \\
 &\quad \cdot \exp\left[-i\frac{2\pi f}{z}(\xi x' + \eta y')\right] d\xi d\eta (\lambda f)^2. \quad (14)
 \end{aligned}$$

按图 6 中的物象几何关系,有:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{f}{z} x', & y &= -\frac{f}{z} y', \\ 1 - \frac{d}{f} + \frac{f}{z} &= d\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{f} + \frac{f}{2d}\right) = d\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d}\right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

于是(14)式可写成:

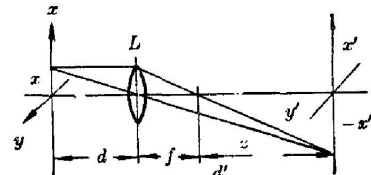


图 6

$$\Psi'_n(x') = -\frac{f}{z} \exp\left[i \frac{k}{2z} (x'^2 + y'^2)\right] \cdot \mathcal{F}^{-1}[F'_n(\xi)], \quad (16)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F'_n(\xi)] = e^{i2n\pi\xi/d} \cdot \left\{ \frac{a}{d} \operatorname{sinc}\left(\frac{na}{d}\right) + \frac{b}{d} e^{in\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{nb}{d}\right) \cdot \varphi(x) \right\} \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{x}{c}\right). \quad (17)$$

将(17)式代入(16)式,且令  $M = z/f$ , 则得

$$\Psi'_n(x') = -\frac{1}{M} \exp\left[i \frac{k}{2z} (x'^2 + y'^2)\right] \cdot \left\{ \frac{a}{d} \operatorname{sinc}\left(\frac{na}{d}\right) + \frac{b}{d} e^{in\pi} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{nb}{d}\right) \cdot \varphi\left(-\frac{x'}{M}\right) \right\} \cdot \operatorname{rect}\left(-\frac{x'}{cM}\right), \quad (18)$$

这就是由某一级频谱单独衍射到象面的复振幅分布。由于  $a+b=d$ , 所以可以证明: 当  $n$  为奇数时,

$$\frac{b}{d} e^{in\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{nb}{d}\right) = -\frac{b}{d} \frac{\sin[n\pi - n\pi(a/d)]}{n\pi(b/d)} = -\frac{a}{d} \operatorname{sinc}\left(\frac{na}{d}\right); \quad (19)$$

当  $n$  为偶数时,

$$\frac{b}{d} e^{in\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{nb}{d}\right) = \frac{b}{d} \frac{\sin[n\pi - n\pi(a/d)]}{n\pi(b/d)} = -\frac{a}{d} \operatorname{sinc}\left(\frac{na}{d}\right); \quad (20)$$

即(18)式大括号内的两个常数项,除  $n=0$  外,总是数值相等,符号相反的;而函数

$$\left| \varphi\left(-\frac{x'}{M}\right) \right| \leq 1.$$

根据振幅相减可实现衬度反转的原理,就可说明满足(18)式所表示的零级象对于零级以外各级象,衬度总是相反的。

为了直观起见,我们给出几组数据及示意图来表示。设矩形光栅的  $\frac{a}{d} = \frac{9}{19}$ ,  $\frac{b}{d} = \frac{10}{19}$ , 代入(18)式,当  $n=0$  (0级)时,  $e^{in\pi} = 1$ 。

$$\Psi'_0(x') = -\frac{1}{M} \exp\left[i \frac{k}{2z} (x'^2 + y'^2)\right] \cdot \left\{ 0.474 + 0.526 \cdot \varphi\left(-\frac{x'}{M}\right) \right\} \cdot \operatorname{rect}\left(-\frac{x'}{cM}\right), \quad (21)$$

可见(21)式的函数形式与(6)式基本相同,即物、象相似。但光栅条纹没有了,只是在直流量上迭加上象的振幅分布。所以两者衬度是相同的。其振幅分布如图7(a)所示,强度分布如图7(b)所示。

当  $n = \pm 1$  ( $\pm 1$ 级)时,  $e^{in\pi} = -1$ 。

$$\Psi'_{\pm 1}(x') = -\frac{1}{M} \exp\left[i \frac{k}{2z} (x'^2 + y'^2)\right] \cdot \left\{ 0.317 - 0.317 \cdot \varphi\left(-\frac{x'}{M}\right) \right\} \cdot \operatorname{rect}\left(-\frac{x'}{cM}\right). \quad (22)$$

与(21)式相比,(22)式大括号内两项的符号刚好相反,这就实现了衬度反转。图7(c), (d)即表示  $\pm 1$  级象的振幅分布及强度分布。

当  $n = \pm 2$  ( $\pm 2$ 级)时,  $e^{in\pi} = 1$ 。

$$\Psi'_{\pm 2}(x') = -\frac{1}{M} \exp\left[i \frac{k}{2z} (x'^2 + y'^2)\right] \cdot \left\{ 0.026 - 0.026 \cdot \varphi\left(-\frac{x'}{M}\right) \right\} \cdot \operatorname{rect}\left(-\frac{x'}{cM}\right). \quad (23)$$

当  $n = \pm 3$  ( $\pm 3$  级) 时,  $e^{in\pi} = -1$ 。

$$\Psi'_{\pm 3}(x') = -\frac{1}{M} \exp\left[i\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)\right] \cdot \left\{-0.103 + 0.103 \cdot \varphi\left(-\frac{x'}{M}\right)\right\} \cdot \text{rect}\left(-\frac{x'}{cM}\right) \quad (24)$$

与(21)式比较,大括号内两项符号也是相反的。图 7(e), (f)画出了  $\pm 3$  级象的振幅及强度分布。

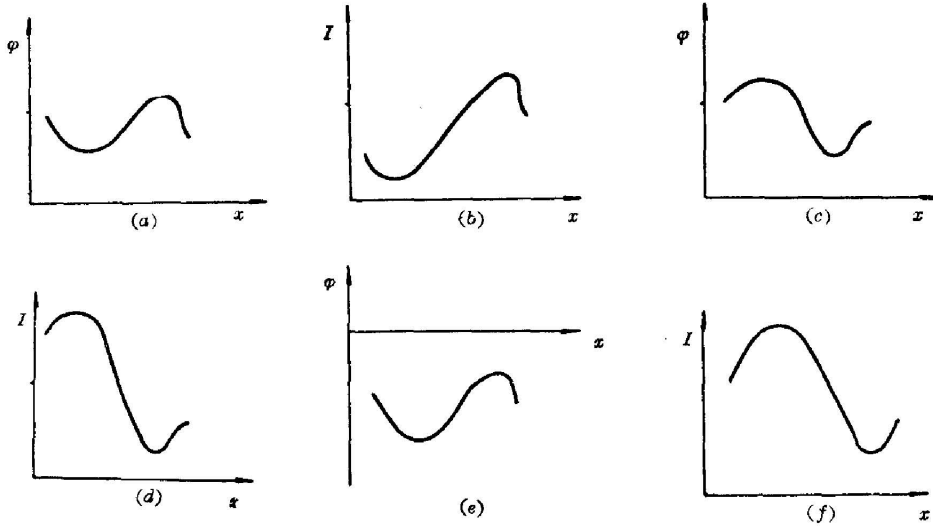


图 7

(2) 如果待编码片的反差过大,或是曝光过度,使得  $I_{mt}$  中的某一部分大于  $E_2$ , 如图 8(a)所示,则底片曝光后的密度分布如图 8(b)所示。其中符合(1)中所讨论的  $I_{mt} < E_2$  的那一部分图象,仍可实现衬度反转。但对于  $I_{mt} > E_2$  的部分,由于形成的密度过大,且近似相等,所以其透射光强分布如图 8(c)所示。可以看到其直流成分(背景亮度)太小,由零级以外各级所成象的振幅分布如图 8(d)所示,强度分布如图 8(e)所示。其左半部与 8(c)相同,即未反转;右半部与 8(c)相反,即发生反转。所以图象将出现反转与不反转两部分。若编码片的密度分布都与左半部相同,则将会发生完全不反转的现象。

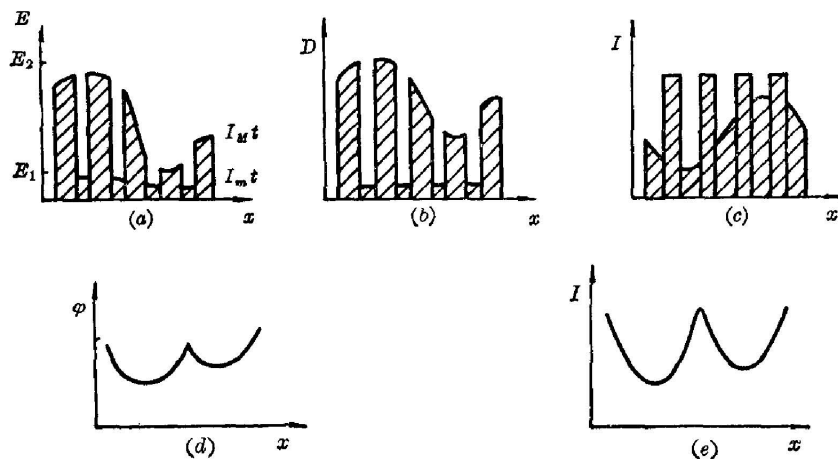


图 8

如果改用白光作光源,其反转情况完全相同。从而为图象密度假彩色的两色合成提供了条件。若采用两个点光源,对频谱作滤波处理,还可得到半反转图象。当分别给正象,负象、半反转象以不同颜色时,即可在象面上得到三色合成的彩色象。

南开大学母国光教授为我们仔细审阅了原稿,并提出宝贵意见,在此表示感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] O. Bryngdahl; *J. O. S. A.*, 1970, **60**, No. 12 (Dec), 1698.
- [2] 杨振寰,庄松林等;《光学学报》,1981, **1**, No. 1 (Jan), 13.
- [3] A. Tai, F. T. S. Yu *et al.*; *Opt. Lett.*, 1978, **3**, No. 5 (Nov), 190.
- [4] T. H. Chao, S. L. Zhuang *et al.*; *Opt. Lett.*, 1980, **5**, No. 6 (Jun), 230.

### Theoretical analysis on contrast reversal of a rectangular grating encoded picture

WANG SHUYING ZHANG JINGJIANG AND PENG FANGLIN

(Department of Physics, Beijing Normal University)

(Received 26 June 1983; revised 18 October 1983)

#### Abstract

A new theoretical analysis of the contrast reversal images for the zeroth and other diffraction order encoded by a rectangular grating is given. According to the principle that the contrast reversion is formed by subtraction of amplitudes, this paper proposed a physical model for the transmittance of an encoded picture. By means of Fourier analysis, a correct result is derived which fits well with the experimental results.