

# 光学谐振腔本征模的正交性

方洪烈

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## 提 要

本文分析了一般光学谐振腔横向本征模的正交性质。指出本征模  $U_n$  与伴随模  $u_n$  之间具有  $(u_n^*, U_m)$  的正交性。

## 一、引 言

关于光学谐振腔横向本征模的正交性问题已有若干讨论<sup>[1]</sup>。虽然用以确定谐振腔本征模的积分算符一般说来不是厄米算符,因此不具有  $(u^*, u)$  这样的正交关系,但对于相当一部分谐振腔来说,这个积分算符是复对称算符。它的本征函数具有如  $(u, u)$  意义的正交性。

Arnaud 讨论了另一种正交性<sup>[2]</sup>,他对厄米-高斯模系证明了一个谐振腔的本征模  $u$  与该谐振腔的伴随模  $v$  具有  $(u, v)$  意义的正交性。所谓的伴随模就是在同一个谐振腔内沿相反方向传播的本征模。Arnaud 的结论是正确的,因为对于厄米-高斯模来说  $v = u^*$ , \* 表示复共轭。

1979年 Siegman 将这一意义下的正交性推广到所有情况<sup>[3]</sup>,这是错误的。产生此错误的原因在于 Siegman 用了一个错的反向光路矩阵。1982年 Oughstun 虽然给出了一个正确的反向光路矩阵,但他并没有改正这一错误<sup>[4]</sup>,仍然沿用这一错误结果。看来纠正这一错误是必要的。

本文的目的是对一般光学谐振腔横向本征模的正交性作了严格的分析,给出一个正确的结果,并阐明其物理意义。

## 二、推 导

对于任意多元件谐振腔的积分方程是<sup>[1]</sup>

$bU(x, y)$

$$-\frac{i}{\lambda B} \iint U(x', y')$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{ik}{2B} [A(x'^2 + y'^2) + C(x^2 + y^2) - 2(xx' + yy')] + S(x, y) + S(x', y')\right\} dx' dy' \quad (1)$$

方程适用于一个无象散、可分离变量的系统,但这并不妨碍结果的普遍性。其中  $b$  和  $U$  分别是本征值和本征函数,  $k$  是波数。积分是在建立此方程的参考面上有定义的区域内进行。

收稿日期: 1983年12月9日

此外:

(1) 如果参考面是在驻波链腔的一个终端反射镜面上,  $S(x, y)$  是此反射面的面形函数,  $A, B, C$  是光线从离开镜面起在腔内往返传播回到镜面止(但不包括该镜面的一次反射)的传输矩阵  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ \varphi & C \end{pmatrix}$  的元素。此时  $T$  与谐振腔的变换矩阵(环程矩阵)  $D$  的关系是  $D = RT$ ,  $R$  是此镜面的反射矩阵。

(2) 如果此终端反射镜是平面镜时,  $S=0$ , 以及  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T$ 。

(3) 如果参考平面选在腔内空间任意位置时,  $S=0$ ,  $D=T$ 。此情况对驻波链腔和行波环腔均适用。

为了简单起见, 我们采用 Siegman 使用的模型, 即如图 1 所示的环形腔为例来讨论<sup>[3]</sup>。

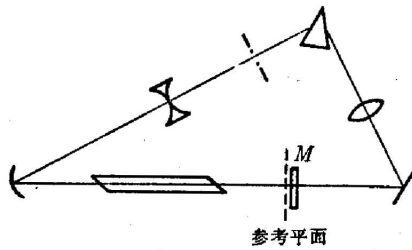


图 1 复杂环形谐振腔

Fig. 1 A complex ring resonator

此腔可以包含有各种复杂的傍轴光学元件, 如透镜、高斯光阑以及折射率分布为二次函数的介质等等。为了更普遍一些, 还可以假定此腔的输出耦合器(对链腔为输出反射镜)具有一个任意的透过率分布(对链腔为反射率分布)  $\rho(x, y)$ , 并且我们将参考平面选在紧贴输出耦合器的左边。

首先我们来考虑逆时方向(正向)传播的情况, 此时

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ \varphi & C \end{pmatrix}, \text{ 积分方程为}$$

$$b_n U_n(x, y) = \frac{i}{\lambda B} \iint_M \rho(x', y') U_n(x', y') \times \exp\left\{-\frac{i\pi}{\lambda B} [A(x'^2 + y'^2) + C(x^2 + y^2) - 2(xx' + yy')]\right\} dx' dy', \quad (2)$$

其中  $b_n, U_n$  分别为第  $n$  个本征值和本征函数。积分是在参考平面上由输出耦合器  $M$  所限定的区域内进行。

对于顺时针方向(反向)传播的光路来说, 由光路可逆定理可知其传输矩阵  $T^2$  是  $T$  的逆矩阵  $T^{-1} = \begin{pmatrix} C & -B \\ -\varphi & A \end{pmatrix}$ , 本征模  $U_n$  的伴随模  $u_n$  满足方程

$$\gamma_n u_n(x, y) = -\frac{i}{\lambda B} \rho(x, y) \iint_M u_n(x', y') \times \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda B} [C(x'^2 + y'^2) + A(x^2 + y^2) - 2(xx' + yy')]\right\} dx' dy', \quad (3)$$

积分在同样的区域内进行。

当  $A \neq C$  时, (2) 式和 (3) 式中的积分算符都不是对称的, 它们的本征函数也不是正交的。为此我们定义两个函数如下:

$$E_n(x, y) = \alpha_n^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}}(x, y) U_n(x, y) \exp\left\{-\frac{i\pi}{2\lambda B} (A - C)(x^2 + y^2)\right\}. \quad (4)$$

$$F_n(x, y) = \alpha_n^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}(x, y) u_n(x, y) \exp\left\{-\frac{i\pi}{2\lambda B} (A-C)(x^2+y^2)\right\}, \quad (5)$$

其中  $\alpha_n$  是一个任意的常数, 可用来归一化。如果我们定义一个新的对称积分核:

$$K(x, y; x', y') = \frac{i}{\lambda B} \rho^{\frac{1}{2}}(x, y) \rho^{\frac{1}{2}}(x', y') \times \exp\left\{-\frac{i\pi}{2\lambda B} [(A+C)(x^2+y^2+x'^2+y'^2) - 4(xx'+yy')]\right\}, \quad (6)$$

那么方程(2)和(3)变为:

$$b_n E_n(x, y) = \iint_M K(x, y; x', y') E_n(x', y') dx' dy', \quad (7)$$

$$\gamma_n F_n(x, y) = \iint_M K^*(x, y; x', y') F_n(x', y') dx' dy'. \quad (8)$$

方程(7)和(8)给出

$$\gamma_n^* = b_n, \quad F_n^* = E_n. \quad (9)$$

由(9)式我们看到一个谐振腔的本征模与它的伴随模是互为复数共轭的关系, 而不是如文献[3]中得出的“完全相等”的关系。

下面我们引入一个标量积的表示

$$(u, v)_M \equiv \iint_M u(x, y) v(x, y) dx dy \quad (10)$$

以及

$$(u, v) \equiv \iint u(x, y) v(x, y) dx dy \quad (11)$$

表示积分在无穷区域内的标积。

既然积分核  $K$  和  $K^*$  都是对称的, 并且输出耦合器外的输出场(或输出反射器外的反射场)为零, 那么方程(7)和(8)给出如下的正交关系:

$$(E_n, E_m)_M = (F_n^*, E_m) = (F_n, F_m) = \delta_{nm}. \quad (12)$$

从(4), (5), (10)和(11)式立刻得出

$$(u_n^*, U_m)_M = (u_n^*, U_m) = \delta_{nm}, \quad (13)$$

这就是谐振腔本征模与它的伴随模的正交关系。对于对称核来说, 它的本征模之间的正交关系和本征模与其伴随模的正交关系是不同的。只有本征函数是实数的情况此二正交关系才是相同的。Arnaud的情况正是这种情况。

虽然  $U_m$  不具有(11)式的正交关系。但由(12)式可有

$$(U_n, \rho G U_m) = \delta_{nm}, \quad (14)$$

$$(u_n, \rho^{-1} G u_m) = \delta_{nm}, \quad (15)$$

其中

$$G(x, y) = \exp\left\{-\frac{i\pi}{\lambda B} (A-C)(x^2+y^2)\right\}. \quad (16)$$

(14)式表明一个腔的本征模是带权( $\rho G$ )正交的, 同样其伴随模也是带权( $\rho^{-1} G$ )正交的。这就是一般谐振腔本征模的普遍正交关系。

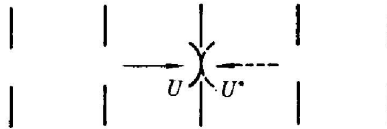
### 三、讨 论

上面所得结果的物理意义是清楚的。

(1) 本征值  $b_n$  和  $\gamma_n$  给出同样的衍射损失

$$A=1-|b_n|^2=1-|\gamma_n|^2$$

和完全相同的共振频率。因为在本征值中我们省略了一项  $\exp(ikL)$ ,  $L$  是环形腔的长度或



驻波腔的二倍腔长。对于反向传播的波来说此因子是  $\exp(-ikL)$ 。因此波在腔内两个相反方向上往返一周的总相移相等:

$$|kL + \arg b_n| = |-kL + \arg \gamma_n|。$$

图 2 谐振腔的本征模和伴随模

Fig. 2 An eigenmode and an adjoint eigenmode of a resonator

这是自然的、合理的。因为对同一个腔来说,不同方向的损失和频率应是相同的。

(2) 本征模  $U_n$  是复数表明参考面不是本征模的等相面。 $\arg U_n$  给出相差分布。本征函数与伴随函数的复共轭关系表明它们的相差分布对于参考面是对称的,这一点不难看出。例如对于 Fox-Li 的平面腔模型来说,正反向的传播是完全对称的,见图 2。因此本征模与伴随模是复共轭关系也是十分自然的。

### 参 考 文 献

- [1] 方洪烈;《光学谐振腔理论》, (科学出版社, 北京, 1981), 60; 297.
- [2] J. A. Arnaud; 《Beam and Fiber Optics》, (Academic Press, New York, 1976), 122; 175.
- [3] A. E. Siegman; *Optics Comm.*, 1979, **31**, No. 3 (Dec), 369.
- [4] K. E. Oughstun; *Optics Comm.*, 1982, **42**, No. 1 (Jun), 72.
- [5] A. G. Fox, T. Li; *Bell. Syst. Tech. J.*, 1961, **40**, No. 2 (Mar), 453.

## Orthogonal property of optical resonator eigenmodes

FANG HONGLIE

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 9 December 1983)

### Abstract

In this note a general orthogonal property of optical resonator eigenmodes is analyzed. The orthogonality in the  $(u^*, U)$  sense of the eigenmodes  $U$  and their adjoint modes  $u$  is obtained.