

# c-切 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导 TM 模的本征值方程

金 锋

(中国科学院长春物理研究所)

## 提 要

本文利用射线光学方法,推得了c-切 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导 TM 模的本征值方程和截止方程。对于折射率为指数和高斯分布的扩散波导,利用这些方程制出若干低阶模的有效折射率与扩散深度、截止扩散深度与波导表面折射率增量的关系曲线,可供波导测量和制备使用。

## 一、引 言

在集成光学研究工作中, LiNbO<sub>3</sub> 光波导器件多半采用 b-切衬底,但有一些器件还采用 c-切或 a-切衬底。

在 b-切波导中沿 a 轴传播的 TE 和 TM 模,或在 a-切波导中沿 b 轴传播的 TE 和 TM 模,分别遇到非寻常折射率  $n_e$  和寻常折射率  $n_o$ 。在 c-切波导平面上,沿任意方向传播的 TE 模均遇到  $n_o$ 。因此,这些模式的传播行为可由各向同性介质波导理论处理<sup>[1~4]</sup>。然而,在 c-切波导平面上沿任意方向传播的 TM 模,却遇到由  $n_e$  和  $n_o$  共同决定的折射率,只能由各向异性介质波导理论处理。

Marcuse 从麦克斯韦方程出发处理了折射率为阶跃分布的 c-切 LiNbO<sub>3</sub> 平板波导的传播特性<sup>[5]</sup>。但是,从波动光学角度严格处理 c-切 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导 TM 模的边值问题,是一件比较复杂的事情。本文利用射线光学方法,推得了 c-切 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导 TM 模的本征值方程和截止方程,以此分析了折射率为指数和高斯分布的扩散波导 TM 模的传播特性和截止特性,并给出有关的特性曲线。

## 二、导模的射线光学

图1表示在 c-切 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导中 TM 模的弧形光路,即其波矢量  $\mathbf{K}$  的传播路线。其中,横向坐标  $x$  轴代表波导深度方向并与  $c$  轴相重合,纵向坐标  $z$  轴代表导模的传播方向; $x=0$  为波导表面的坐标, $x=x_t$  为弧形光路拐点的坐标; $h$  和  $\beta$  分别为  $\mathbf{K}$  的横向和纵向分量,分别称为横向和纵向传播常数; $\theta$  为  $\mathbf{K}$  与  $x(c)$  轴的夹角。

设  $n_e$  和  $n_o$  沿  $x$  方向的分布分别为

$$n_j^2(x) = \begin{cases} n_{c_j}^2 + (n_{c_s}^2 - n_{c_0}^2)f(x/d) & (x \geq 0), \\ 1(\text{空气}) & (x < 0), \end{cases} \quad (1)$$

$$n_o^2(x) = \begin{cases} n_{ob}^2 + (n_{os}^2 - n_{ob}^2)f(x/d) & (x \geq 0), \\ 1 \text{ (空气)} & (x < 0), \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $f(x/d)$  为折射率分布函数, 在  $x=0$  处为 1, 随着  $x$  的增加单调地减至零,  $d$  为扩散深度; 下标  $s$  和  $b$  分别表示波导的表面和衬底的折射率。

设  $n(x)$  为 TM 模遇到的折射率, 可由单轴晶体的折射率椭球推得<sup>[6]</sup>:

$$n^2(x) = \frac{n_o^2(x)n_e^2(x)}{n_o^2(x) - [n_o^2(x) - n_e^2(x)]\sin^2\theta(x)} \quad (3)$$

引入有效折射率  $N = \beta/k = n \sin \theta$ , 由(3)式推得

$$n^2(x) = n_o^2(x) + \left[1 - \frac{n_o^2(x)}{n_e^2(x)}\right]N^2, \quad (4)$$

式中  $k$  为真空传播常数。由(4)式, 容易推得

$$h(x) = nk \cos \theta = [n^2(x) - N^2]^{1/2}k = \frac{n_o(x)}{n_e(x)}[n_o^2(x) - N^2]^{1/2}k. \quad (5)$$

在  $x=x_t$  处,  $h(x_t) = 0$ , 由(5)式, 得

$$N = n(x_t) = n_e(x_t). \quad (6)$$

可见, TM 模的有效折射率不仅等于拐点处的折射率, 而且等于拐点处的非寻常折射率。由于  $n_{es} > n_e(x_t) > n_{eb}$ , 故  $N$  的取值范围为

$$n_{es} > N > n_{eb}. \quad (7)$$

在弧形光路中, 导模在波导表面和拐点之间往返一次时的横向传播相移为  $2 \int_0^{x_t} h(x) dx$ 。

设导模在波导表面上的全反射相移为  $-2\phi_s$ , 且路径拐点时的相移为  $-2\phi_t$ , 则由横向相位自洽条件(即横向共振条件)<sup>[1]</sup>和(5)式, 推得 c-切 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导 TM 模的本征值方程

$$k \int_0^{x_v} \frac{n_o(x)}{n_e(x)} [n_o^2(x) - N_v^2]^{1/2} dx = \nu\pi + \phi_s + \phi_t, \quad (8)$$

式中,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  称为模阶数,  $N_\nu$  为  $\nu$  阶模的有效折射率,  $x_\nu$  为  $\nu$  阶模的拐点坐标。

### 三、 $\phi_s$ 和 $\phi_t$ 的表达式

为了求得  $\phi_s$  和  $\phi_t$  的表达式, 我们研究 TM 波在两层均匀单轴晶体界面上的全反射, 如图 2 所示。其中, 介质 1 的折射率为  $n_{e1}$  和  $n_{o1}$ , 介质 2 的折射率为  $n_{e2}$  和  $n_{o2}$ ; 两层介质的  $c$  轴均与界面相垂直, 且  $c$  轴和界面分别与  $x$  轴和  $z$  轴相重合。

设  $y$  轴与入射面相垂直, 则 TM 波只有磁场分量  $H_y$  和电场分量  $E_x$ 、 $E_z$ 。假定这些场分量与纵向传播距离  $z$  和时间  $t$  的关系为

$$[H_y; E_x; E_z] = [\mathcal{H}_y(x); \mathcal{E}_x(x); \mathcal{E}_z(x)] \exp[i(\beta z - \omega t)], \quad (9)$$

式中,  $\beta$  仍为纵向传播常数,  $\omega$  为光波的角频率。将(9)式代入麦克斯韦方程, 推得 TM 波的场分量关系式和波方程

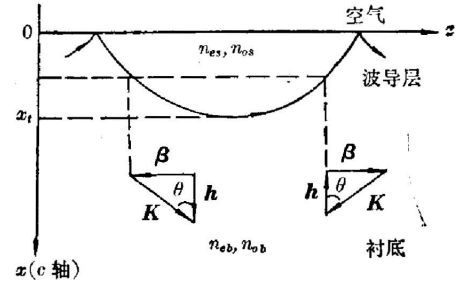


图 1 在 c-切 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导中 TM 模的弧形光路

Fig. 1 Arc-wave path of the TM mode in a diffused c-cut LiNbO<sub>3</sub> waveguide

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= (\beta z_0/n_{e1}^2 k) \mathcal{H}_y, \\ \mathcal{E}_z &= i(z_0/n_{o1}^2 k) (\partial \mathcal{H}_y / \partial x), \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}_y}{\partial x^2} + \frac{n_{o1}^2}{n_{e1}^2} (n_{e1}^2 - \beta^2) \mathcal{H}_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

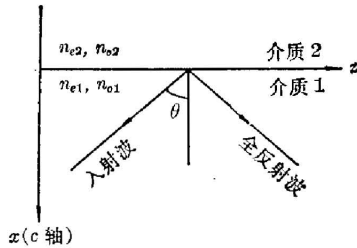


图2 TM波在两层均匀单轴晶体界面上的全反射

Fig. 2 Total internal reflection of the TM wave at an interface of two uniform uniaxial crystal

式中, 下标  $l=1$  和  $2$  分别表示介质 1 和介质 2 的折射率,  $z_0$  为真空波阻抗。图 2 所示的全反射对应于  $n_{e1}k > \beta > n_{e2}k$ , 对此设波方程解为

$$\mathcal{H}_y(x) = \begin{cases} Ae^{-ih_1x} + Be^{ih_1x}, & x \geq 0 \text{ (介质 1)}, \\ De^{p_2x}, & x < 0 \text{ (介质 2)}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= (n_{o1}/n_{e1}) (n_{e1}^2 - N^2)^{1/2} k, \\ p_2 &= (n_{o2}/n_{e2}) (N^2 - n_{e2}^2)^{1/2} k_o \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(11) 式中,  $h_1$  为介质 1 中的横向传播常数,  $p_2$  为介质 2 中的横向衰减常数,  $A$  和  $B$  分别为入射波和反射波的场振幅。

由场分量  $H_y$  和  $E_z$  在界面处必须连续的边界条件, 并用 (10)~(12) 式, 推得反射系数

$$r_{12} = B/A = \exp(-i2\phi_{12}), \quad (13)$$

$$\phi_{12} = \tan^{-1} \left( \frac{n_{o1}n_{e1}}{n_{o2}n_{e2}} \right) \left( \frac{N^2 - n_{e2}^2}{n_{e1}^2 - N^2} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

式中,  $-2\phi_{12}$  就是界面处的全反射相移。对于一切 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导 TM 模, 在 (14) 式中令  $n_{e2} = n_{o2} = 1$ ,  $n_{e1} = n_{es}$ ,  $n_{o1} = n_{os}$ , 推得在波导表面上全反射相移的表达式

$$\phi_s = \tan^{-1} (n_{es}n_{os}) \left( \frac{N^2 - 1}{n_{os}^2 - N^2} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

类似于文献 [1] 中推导拐点相移的方法, 由 (14) 式不难证明

$$\phi_t = \pi/4. \quad (16)$$

这就说明, 各向异性渐变折射率波导的拐点相移等于各向同性渐变折射率波导的拐点相移。

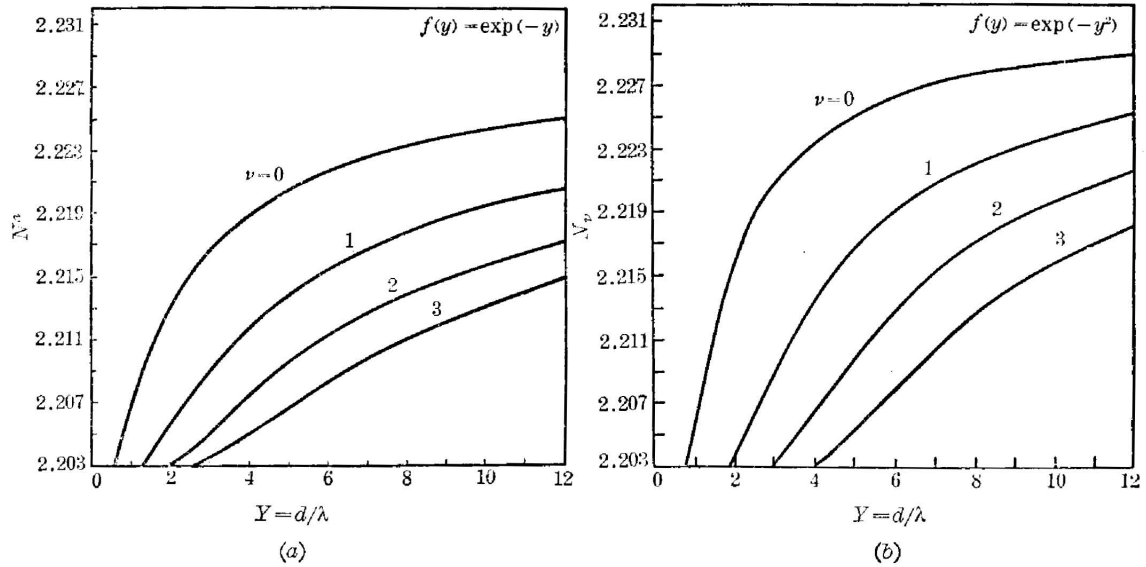
#### 四、传播特性曲线

将 (1)、(2)、(15) 和 (16) 式代入 (8) 式, 并作变量替换  $y = x/d$ , 推得一切 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导 TM 模的本征值方程的具体形式:

$$\begin{aligned} kd \int_0^{y_\nu} \left[ \frac{n_{ob}^2 + (n_{os}^2 - n_{ob}^2)f(y)}{n_{ob}^2 + (n_{os}^2 - n_{cb}^2)f(y)} \right]^{1/2} [(n_{os}^2 - n_{cb}^2)f(y) - (N_\nu^2 - n_{cb}^2)]^{1/2} dy \\ = (\nu + 1/4)\pi + \tan^{-1} (n_{os}n_{es}) \left( \frac{N_\nu^2 - 1}{n_{os}^2 - N_\nu^2} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中, 积分上限为  $y_\nu = x_\nu/d$ 。据 (6) 式,  $y_\nu$  可由关系式  $N_\nu = n_e(y_\nu)$  求得。

设波导表面折射率增量为  $\Delta n_e = n_{es} - n_{eb}$  和  $\Delta n_o = n_{os} - n_{ob}$ , 且引入一个参量  $Y = d/\lambda$ ,  $\lambda$  为真空光波长。对于 Ti 扩散 LiNbO<sub>3</sub> 波导, 一般有  $\Delta n_e > \Delta n_o$  [17]。令  $\Delta n_e = 0.029$  和  $\Delta n_o = 0.007$ , 并利用  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$  的折射率  $n_{eb} = 2.203$  和  $n_{cb} = 2.295$ , 对于折射率的指数分布和高斯分布, 由 (17) 式画出若干低阶模的  $N_\nu \sim Y$  曲线, 示于图 3。这些传播特性曲线只适用于确定的波导折射率和激光波长。

图 3  $N_\nu \sim Y$  曲线Fig. 3  $N_\nu \sim Y$  curves(a)  $f(y) = \exp(-y)$ ; (b)  $f(y) = \exp(-y^2)$ 

为了求得在任意波导折射率和光波长下通用的传播特性曲线, 对于  $\Delta_e = \Delta n_e/n_e \ll 1$  和  $\Delta_o = \Delta n_o/n_o \ll 1$ , 利用合理近似

$$\left. \begin{aligned} n_e(y) &\approx n_{eb} + \Delta n_e f(y), \\ n_o(y) &\approx n_{ob} + \Delta n_o f(y), \\ n_{oy}(y)/n_e(y) &\approx (n_{ob}/n_{eb}) [1 - (\Delta_e - \Delta_o) f(y)], \\ \phi_s &\approx 0.5\pi_0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

并引入归一化参数

$$\left. \begin{aligned} b_\nu &= (N_\nu^2 - n_{eb}^2)/(n_{es}^2 - n_{eb}^2) \quad (\text{归一化有效折射率}), \\ V &= (n_{ob}/n_{eb}) (n_{es}^2 - n_{eb}^2)^{1/2} kd \quad (\text{归一化扩散深度}), \\ \alpha &= \Delta_e - \Delta_o \quad (\text{归一化双折射}). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由(17)式推得归一化本征值方程

$$V \int_0^{y_\nu} [1 - \alpha f(y)] [f(y) - b_\nu]^{1/2} dy = (\nu + 3/4)\pi_0. \quad (20)$$

对于折射率的指数分布和高斯分布, 将  $\alpha$  作为参变量, 由(20)式画出若干低阶模的  $b_\nu \sim V$  曲线, 示于图 4。其中,  $\alpha$  的取值范围  $\alpha = -0.02 \sim 0.02$  大致包括各种 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导, 如 Ti 扩散波导 ( $\alpha > 0$ )<sup>[7]</sup>, Ni 扩散波导 ( $\alpha < 0$ )<sup>[7]</sup> 和 Li 外扩散波导 ( $\alpha > 0$ )<sup>[8]</sup> 等。

为了估计(20)式的近似程度, 对于  $n_{eb} = 2.203$ ,  $n_{ob} = 2.295$ ,  $\Delta n_e = 0.029$  和  $\Delta n_o = 0.007$ , 由(17)和(20)式分别计算出 TM<sub>0</sub> 模的  $N_0 \sim Y$  定量关系, 列入表 1。由此表看到, 由(17)和(20)式给出的数据相差约 1%, 因此在实际工作中可以使用(20)式。

图 3 和图 4 所示的传播特性曲线, 不仅可以用作从已知波导折射率和扩散深度求出有效折射率, 而且可以用作从已知的有效折射率求出波导参数。

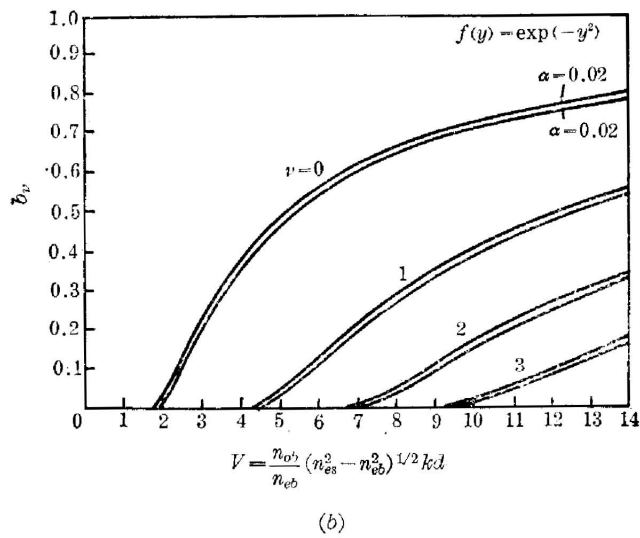
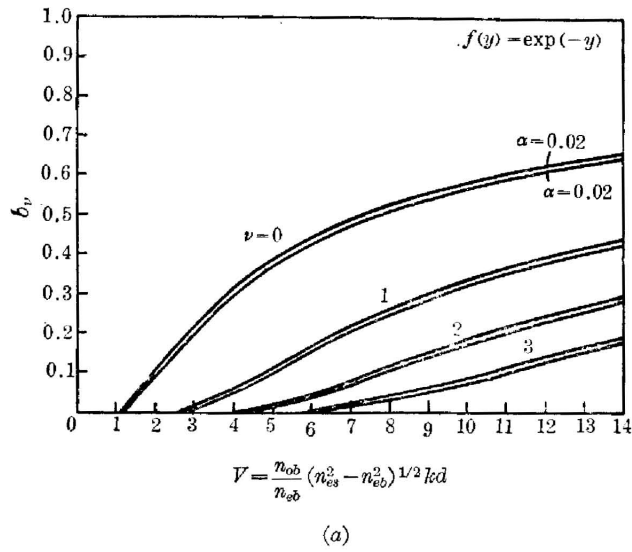


图 4  $b_v \sim V$  曲线

Fig. 4  $b_v \sim V$  curves

(a)  $f(y) = \exp(-y)$ ; (b)  $f(y) = \exp(-y^2)$

表 1 由(17)和(20)式给出的  $N_0 \sim Y$  定量关系

Table 1  $N_0 \sim Y$  quantitative relations given by Eq. (17) and Eq. (20)

$f(y)$		$N_0$					
		2.207	2.211	2.215	2.219	2.223	2.227
$e^{-y}$	(17)	1.020	1.570	2.429	3.994	7.511	19.47
	(20)	1.034	1.590	2.457	4.033	7.569	19.56
$e^{-y^2}$	(17)	1.118	1.436	1.874	2.561	3.841	7.152
	(20)	1.134	1.454	1.895	2.586	3.872	7.191

### 五、截止特性曲线

在(20)式中, 令  $b_\nu=0$ , 即  $N_\nu=n_{eb}$ ,  $y_\nu \rightarrow \infty$ , 推得 c-切 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导 TM 模的截止方程

$$V_c I = [\nu + (3/4)] \pi, \tag{21}$$

$$I = \int_0^\infty [1 - \Delta_e(1-r)f(y)] \sqrt{f(y)} dy, \tag{22}$$

式中  $V_c$  为归一化截止扩散深度, 且  $r = \Delta_o/\Delta_e$ . 由(21)式, 推得截止扩散深度  $d_o$  和维持单模的条件以及波导所能维持的模式数量  $M$  为

$$d_o = \frac{(4\nu + 3)\lambda}{8n_{ob}I\sqrt{2\Delta_e}}, \tag{23}$$

$$7/8 > n_{ob}I\sqrt{2\Delta_e} (d/\lambda) > 3/8, \tag{24}$$

$$M = \text{Integer}[2n_{ob}I\sqrt{2\Delta_e} (d/\lambda) + 0.25], \tag{25}$$

式中, Integer 表示取括号内数值的整数。对于折射率的指数分布和高斯分布, 将  $r$  作为参变量, 由(23)式画出若干低阶模的  $Y_c = n_{ob}d_o/\lambda \sim \Delta_e$  曲线(即截止特性曲线), 示于图 5。其中,  $r$  的取值范围  $r=0 \sim 2$  大致包括各种 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导, 如 Ti 扩散波导 ( $r < 1$ )<sup>[7]</sup>、Ni 扩散波导 ( $r > 1$ )<sup>[7]</sup> 和 Li 外扩散波导 ( $r=0$ )<sup>[8]</sup> 等。在相邻两阶模的截止特性曲线之间, 还标记了模式数量。上述与截止特性有关的理论公式和特性曲线, 可以用来控制模式数量和设计单模波导。

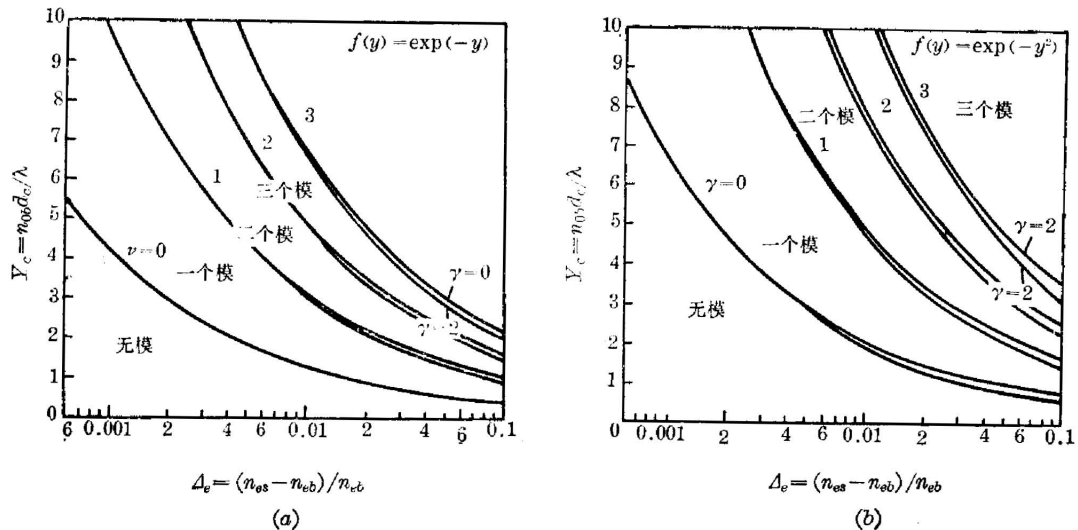


图 5  $Y_c \sim \Delta_e$  曲线

Fig. 5  $Y_c \sim \Delta_e$  curves

(a)  $f(y) = \exp(-y)$ ; (b)  $f(y) = \exp(-y^2)$

在以上传播特性和截止特性的讨论中, 虽然未涉及扩散波导折射率分布的其它常见形式, 如误差余函数和误差余函数积分分布等, 但是利用指数函数与这两种函数的近似关系式<sup>[8]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{erfc}(y) &= \exp(-y/0.69), \\ \sqrt{\pi} \operatorname{ierfc}(y) &= \exp(-y/0.51). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

可以将图 3、图 4 和图 5 中有关指数分布的特性曲线应用于波导折射率的误差余函数和误差余函数积分分布。

综上所述, 本文较详细地研究了  $c$ -切  $\text{LiNbO}_3$  扩散波导 TM 模的边值问题, 并给出了有用的特性曲线, 可供  $c$ -切  $\text{LiNbO}_3$  扩散波导器件的测量和制备使用。本文的研究结果, 原则上也适用于其它  $c$ -切单轴晶体的扩散波导。

### 参 考 文 献

- [1] 金锋, 范俊清; 《集成光学》上册, (国防工业出版社, 1981), § 1.2 和 § 1.4.
- [2] E. M. Conwell; *Appl. Phys. Lett.*, 1973, **23**, No. 6 (Sep), 328.
- [3] G. B. Hoeker, W. K. Burns; *IEEE J. Q. E.*, 1975, **QE-11**, No. 6 (Jun), 270.
- [4] A. Kumar, E. Khular; *Opt. Commun.*, 1978, **27**, No. 3 (Dec), 349.
- [5] D. Marcuse; *IEEE J. Q. E.*, 1975, **QE-11**, No. 9 (Sep), 759.
- [6] 李荫远, 杨顺华; 《非线性光学》, (科学出版社, 1974), 27.
- [7] R. V. Schmidt, I. P. Kaminow; *Appl. Phys. Lett.*, 1974, **25**, No. 8 (Oct), 458.
- [8] J. R. Carruthers *et al.*; *Appl. Opt.*, 1974, **13**, No. 10 (Oct), 2333.

## TM mode propagation properties of diffused $c$ -cut $\text{LiNbO}_3$ waveguides

JIN FENG

(Changchun Institute of Physics, Academia Sinica)

(Received 11 July 1983; revised 31 October 1983)

### Abstract

The eigenvalue and cut-off equations of TM modes in diffused  $c$ -cut  $\text{LiNbO}_3$  waveguides have been derived using ray-optics method. For diffused waveguides with exponential and Gaussian index profiles effective refractive index as a function of the diffusion depth, and cut-off diffusion depth curves as a function of the waveguide surface index increment for some lower order modes have been plotted using these eigenvalue and cut-off equations, which can be used in measurement and fabrication of diffused  $c$ -cut  $\text{LiNbO}_3$  waveguides.