

用铣磨法加工二次非球面的数学原理

潘君骅 王建国

(中国科学院南京天文仪器厂)

提 要

用铣磨法加工二次非球面的想法早在四年前就提出并进行了探讨^[1]。当时对于凹面以三级象差为基础, 求出了边界符合要求的解决办法, 但发现对于中间的带是不严格满足要求的。为了寻求对任何非球面度都适用的严格解, 我们进行了深入研究, 选取磨环最低点与非球面顶点的距离 δ_p 和磨头转角 α_p 为参数来表达铣磨加工时机床的运动规律, 得到严格而简洁的表达式。根据这个表达式可以设计适用性很强的, 用计算机控制的非球面铣磨机床。进一步考虑到某些生产批量大的特定非球面元件, 我们认为从机构运动上实现 δ_p 和 α_p 所要求的规律则更为理想, 因此找出凸轮副的数学关系式, 从而可利用磨头轴的纯滚动来完成非球面化, 它可以多次重复磨制过程而使所形成的曲面平滑。

一、基本关系的推导

用 $y^2 = 2R_0x - (1 - e^2)x^2$ 表达轴对称二次非球面, 其中 R_0 为顶点曲率半径, e 为偏心率。

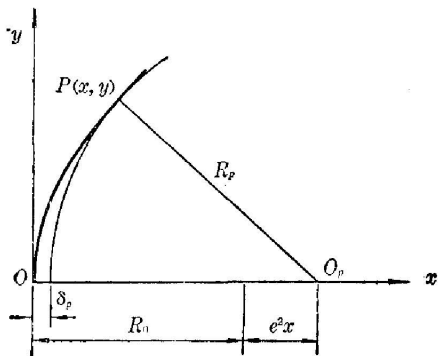


图 1

曲面上任意一点 $P(x, y)$ 的法线与 x 轴的交点 O_p 距非球面顶点为 $R_0 + e^2x$ 。以 O_p 为圆心, $\overline{O_pP}$ 为半径作球面, 则 P 点是球面与非球面的切点。因此我们可以将非球面看作是球心在对称轴上, 半径为 $\overline{O_pP}$ 的球面族的包络(见图 1)。

在范成法铣磨球面的基础上, 如果令磨具轴与工件轴的夹角 α 以及磨具的轴向位置可变, 使铣磨过程中产生一族球面符合上述的条件, 则铣磨结果自然形成一个包络于这族球面所要求的非球面。现在问题可归结为求出任意带高时磨具应取的位置。

根据图 1, 不难写出曲面上任意点 P_y 的切球面半径值

$$R_p = \overline{O_pP} = \sqrt{[x - (R_0 + e^2x)]^2 + y^2} = \sqrt{R_0^2 + e^2y^2}. \quad (1)$$

用范成法铣此球面, 磨具参数必须满足

$$R_p = \frac{d}{2 \sin \alpha_p} \pm r, \quad (2)$$

式中 α_p 为磨具轴与工件轴夹角, d 为铣磨环中径, r 为铣磨环口小半径。当工件为凹面时, (2)式取“+”号; 凸面时, 取“-”号。切球面顶点 A 与非球面顶点 O 之间的距离, 即磨环最低点与非球面顶点之间的距离 δ_p 可以用来表征磨具的轴向移动量。从图 1 可知, $\delta_p = R_0 + e^2x - \sqrt{R_0^2 + e^2y^2}$ 。从非球面方程可解出 $x = [R_0 - \sqrt{R_0^2 - (1 - e^2)y^2}] / (1 - e^2)$ 。于是得到

$$\delta_p = \frac{R_0}{1-e^2} - \frac{e^2}{1-e^2} \sqrt{R_0^2 + (e^2-1)y^2} - \sqrt{R_0^2 + e^2y^2} \quad (3)$$

诸式中,根式取“-”号是考虑 R_0 取正值,从而 x 亦为正值。另外,从(1)、(2)式可求出磨具轴和工件轴之间的夹角

$$\alpha_p = \sin^{-1} \frac{d}{2(\sqrt{R_0^2 + e^2y^2} \mp r)} \quad (4)$$

(3)式只是在 $e^2 \neq 1$ 时成立,当 $e^2 = 1$ 时则可导出

$$\delta_p = R_0 \pm \frac{y^2}{2R_0} - \sqrt{R_0^2 + y^2} \quad (5)$$

对于凹面的情形,(4)式中取“-”号,(5)式中取“+”号。

二、磨具的运动分析及机构设想

实际中常遇到的问题是凹面,我们着重讨论这种情形,因而(4)式中取“-”号。

由于磨具轴和工件轴始终处在同一平面内,故可以把工具运动作为刚体的平面运动来分析,如图2所示。如果选择磨具刃口端面小圆弧曲率中心 O_1 作为分析工具运动的基点,磨具的运动可以看作是随 O_1 点沿 x 轴方向平移和绕 O_1 点转动的合成。这种情况其运动规律已为(3)、(4)两式所完全描述,不需另行推导。但是要使磨具绕 O_1 点转动,在机构设计上难度较大,而选择磨具轴上某一点转动则容易实现。为此,必须找出这点的运动轨迹表达式。

如图2所示,取磨具轴上任意一点 M 来研究,建立随 O_1 点平移的动坐标系 $\xi O_1 \eta$, 可得

$$\xi = \frac{d}{2} \sin \alpha_p + \overline{QM} \cos \alpha_p, \quad \eta = \frac{d}{2} \cos \alpha_p - \overline{QM} \sin \alpha_p$$

将(4)式取“-”号代入上式,可得

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + e^2y^2} - r} \left[\frac{d^2}{4} + \overline{QM} \sqrt{(\sqrt{R_0^2 + e^2y^2} - r)^2 - \frac{d^2}{4}} \right],$$

$$\eta = \frac{d}{2(\sqrt{R_0^2 + e^2y^2} - r)} \left[\sqrt{(\sqrt{R_0^2 + e^2y^2} - r)^2 - \frac{d^2}{4}} - \overline{QM} \right].$$

M 点在 xOy 坐标系中的坐标为 $x_M = \xi + \delta_p + r$, $y_M = \eta$, 即

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + e^2y^2} - r} \left[\frac{d^2}{4} + \overline{QM} \sqrt{(\sqrt{R_0^2 + e^2y^2} - r)^2 - \frac{d^2}{4}} \right] \\ \quad + \frac{R_0}{1-e^2} - \frac{e^2}{1-e^2} \sqrt{R_0^2 - (e^2-1)y^2} - \sqrt{R_0^2 + e^2y^2} + r, \\ y_M = \frac{d}{2(\sqrt{R_0^2 + e^2y^2} - r)} \left[\sqrt{(\sqrt{R_0^2 + e^2y^2} - r)^2 - \frac{d^2}{4}} - \overline{QM} \right]. \end{cases} \quad (6)$$

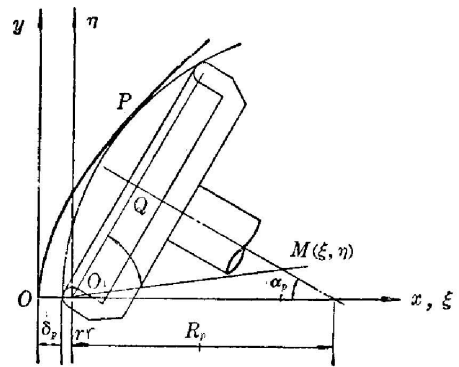


图 2

此外, M 点转过的角度(逆时针)为

$$\theta = \Delta\alpha_p = \sin^{-1} \frac{d}{2(R_0 - r)} - \sin^{-1} \frac{d}{2(\sqrt{R_0^2 + e^2 y^2} - r)} \quad (7)$$

由(6)、(7)两式确定的磨具运动可以通过计算机来控制, 这适合于单件非球面元件的制造。对于大批生产, 用机构来实现特定的磨具运动则更为合理。例如用平面凸轮副。下面将导出凸轮副轮廓的数学表达式。

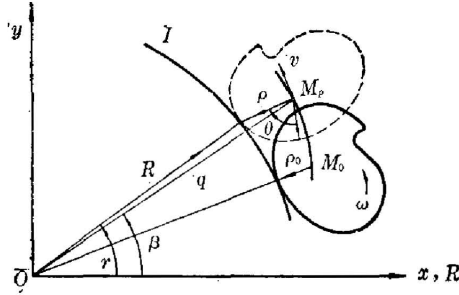


图 3

将磨具轴刚性联结在凸轮上, 凸轮以 M 点为轴可转(见图 3), 并在模板 I 上做纯滚动。模板 I 的曲线取固定极坐标系, 极点与非球面顶点 O 重合, 向径的初始方向与 x 轴重合, 极角逆时针转动为正。凸轮曲线取动极坐标系, 极点为动点 M , 向径的初始方向定为当 $y=0$ 时的 M 点指向 O 点的方向, 即图 3 中的 ρ_0 , 极角顺时针为正。

对任意时刻 t_p 的运动情况进行分析: 由于凸轮在模板上为纯滚动, 任何时刻凸轮与模板的接触点是运动的瞬时中心, 故 M 点的运动速度为

$$v = \rho\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (8)$$

同时, M 点必须以(6)式所决定的轨迹运动, 其速度在 M_p 的切线方向, 即

$$\mathbf{v} = \frac{dx_M}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_M}{dt} \mathbf{j} \quad (9)$$

其标量形式为

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx_M}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_M}{dt}\right)^2} \quad (10)$$

从(8)式和(10)式解得

$$\rho = \frac{1}{\theta_1} \sqrt{x_M^2 + y_M^2} \quad (11)$$

令(6)式中

$$\begin{aligned} \sqrt{R_0^2 + e^2 y^2} &= A, & \sqrt{R_0^2 + (e^2 - 1)y^2} &= B, \\ \sqrt{R_0^2 + e^2 y^2} - r &= C, & \sqrt{(\sqrt{R_0^2 + e^2 y^2} - r)^2 - \frac{d^2}{4}} &= D. \end{aligned} \quad (12)$$

将(6)、(7)两式对 y 微分并经运算后, 可得

$$\begin{cases} \rho = \frac{C}{d} \sqrt{4C^2 - d^2} \left[\left(\frac{QM}{D} + \frac{A}{B} - \frac{d}{4C^2} - \frac{DQM}{C^2} - 1 \right)^2 + \frac{d^2}{4} \left(\frac{1}{D} + \frac{QM}{C^2} - \frac{D}{C^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \theta = \sin^{-1} \frac{d}{2(R_0 - r)} - \sin^{-1} \frac{d}{2C} \end{cases} \quad (13)$$

此即凸轮以 y 为参数的极坐标方程。

令 M 点在固定极坐标系中的坐标为 (β, q) , 从图 3 可写出

$$\rho^2 = R^2 + q^2 - 2Rq \cos(\gamma - \beta),$$

从而

$$R = q \cos(\gamma - \beta) - \sqrt{\rho^2 - q^2 \sin^2(\gamma - \beta)} \quad (14)$$

凸轮和模板滚过的弧长相等, 即 $(ds)^2 = (ds_1)^2$ 。于是得到

$$\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dR}{dy}\right)^2 + R^2 \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)^2 \quad (15)$$

R 系 q, γ, β, ρ 的复合函数, 即 $R=f(q, \gamma, \beta, \rho)$, 故

$$\frac{dR}{dy} = \frac{\partial R}{\partial q} q' + \frac{\partial R}{\partial \gamma} \gamma' + \frac{\partial R}{\partial \beta} \beta' + \frac{\partial R}{\partial \rho} \rho' \quad (16)$$

从(15)、(16)式解得

$$\frac{d\gamma}{dy} = \frac{\pm \sqrt{\left[\left(\frac{\partial R}{\partial \gamma}\right)^2 + R^2\right] (\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2) - R^2 \left(\frac{\partial R}{\partial q} q' + \frac{\partial R}{\partial \beta} \beta' + \frac{\partial R}{\partial \rho} \rho'\right)}{\left(\frac{\partial R}{\partial \gamma}\right)^2 + R^2}, \quad (17)$$

$$R = q \cos(\gamma - \beta) - \sqrt{\rho^2 - q^2 \sin^2(\gamma - \beta)}.$$

上式中各项可以通过(6)、(7)、(12)和(13)式等逐一计算。但是, 实际上(17)式是一个形式极为复杂的微分方程, 难以找出解析解, 可以用计算机进行数值积分先求出 $\gamma(y)$, 然后求出模板曲线 $R(y)$ 。

三、几点讨论

1. 关于方法的适用范围

根据(1)式可知, 当 $e^2 > 0$ 时, R_p 随 y 增加而增加; $e^2 < 0$ 时, R_p 随 y 增加而减少。由此可以看出, 本方法能加工 $e^2 > 0$ 的凹面, 不能加工 $e^2 > 0$ 的凸面; 能加工 $e^2 < 0$ 的凸面, 不能加工 $e^2 < 0$ 的凹面。

2. 影响精度的因素分析

M 点原则上是任意选定的, 但实际上 M 点的位置对加工精度有影响。从图 3 可得 $QM = \frac{d}{2} \operatorname{tg} \varphi$ 。代入(6)式并分离含 $\operatorname{tg} \varphi$ 的项, 得 $x_M = E + F \frac{d}{2} \operatorname{tg} \varphi$, $y_M = G - H \frac{d}{2} \operatorname{tg} \varphi$ 。求对 $\Delta \varphi$ 的微差得 $\Delta x_M = F \frac{d}{2} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Delta \varphi$, $\Delta y_M = -H \frac{d}{2} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Delta \varphi$, 其中 E, F, G, H 分别为不含 φ 项之和。可见 φ 愈大, Δx_M 和 Δy_M 也愈大。即磨具直径愈小或旋转点 M 离磨具刃口愈远, 则加工误差愈大。

3. 关于加工高次非球面的可能性

光学上一般用的高次非球面和二次非球面偏离都不是很大的, 因此总能找到所包络的球面族。根据讨论 1., 只要其 R_p 在给定的 y 值范围内是单调变化的, 则同样能用这个方法加工, 只是 δ_p 及 α_p 的数学关系更为复杂而已。

四、结 语

通过各种实例的计算可以看到 δ_p 和 $\Delta \alpha_p$ 在很大的非球面范围内都是不大的数值, 这点对于保证加工精度是极其重要的, 也是我们致力于这个方法探讨的主要原因。

参 考 文 献

- [1] 潘君骅;《光学学报》,1981, 1, No. 1 (Jan), 43.

Mathematical principle for generating second order aspherical surfaces

PAN JUNHUA AND WANG JIANGUO
(*Nanjing Astronomical Instruments Factory*)

(Received 24 April 1983, revised 26 September 1983)

Abstract

In this article the mathematical formulas for generating second order aspheric surfaces are derived. The aspheric surface to be worked is treated as an envelope of spheres with different radius of curvature at different zones. δ_p and α_p are taken as parameters to describe the motion of grinding tool, where δ_p is the distance between vertex of surface and lowest point of the tool; and α_p is the angle between tool axis and aspheric surface axis.

In order to realize the design of practical machine, it is convenient to change the angle α_p around a point M on tool axis rather than any other point. So that the equations for determining the coordinates of point M are also derived.

In the case of mass production, pure mechanism is better than computer control of the grinding machine, and the best mechanism seems to be cam pair, because such mechanism makes the grinding process repeatable and it is possible to produce a smooth aspherical surface. So that the mathematical equations for cam design are also given.