第4卷 第3期　　光 学 学 报　　Vol. 4, No. 3
1984年3月　　ACTA OPTICA SINICA　　March, 1984

阿达玛变换光谱的解码方法

张 炳 泉
(南开大学物理系)

提　　要

本文给出了快速阿达玛变换中 $M_{n+1}^{(i)}$ 矩阵的每一行两个非零元素的表达式，并给出阿达玛变换光谱的公式解码方法和快速解码方法。

阿达玛变换光谱仪(HTS)具有多通道和高输入量的优点，使得它在环境污染监测、天文、气象以及宇航探测等方面都有特殊的用途。它是一种与傅里叶变换光谱仪相类似的调制光谱仪，必须将测量数据经过计算机解码后，方可获得所测光源的信息。论述阿达玛变换光谱的文献很多[1,2]，但都没有详细给出阿达玛变换光谱仪的解码方法。本文讨论了按照公式解码的方法，给出了 $M_{n+1}^{(i)}$ 矩阵的每一行两个非零元素的值及其定位表达式，并按此表达式编制了 TP803 微型计算机作快速解码的程序。

一、阿达玛变换光谱的公式解码

文献 [2, 3] 中指出，模板的编码为左循环的 S 矩阵时，则未知光谱成分强度值 Ψ 可按下面公式求解：

$$\Psi=\frac{2}{n+1}(2S-J)\eta。\tag{1}$$

把(1)式的矩阵方阵式展开，可以得到第 i 个光谱成分的强度值为：

$$\psi_i=\frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n}(2S_{ij}-1)\eta_j\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{2}$$

按公式(2)进行解码，只要将 S 矩阵和 η 矩阵输入给计算机，则解码是很简单的四则运算。由于 n 值一般很大，如通常采用 $n=255$，这样仅 S 矩阵的阵元就要占有 $n^2=65025$ 个存储单元，一般的微型计算机无法进行解码。

我们考虑到 S 矩阵是左循环矩阵，即它的 $i+1$ 行的阵元可由 i 行的阵元循环向左移动一个阵元的位置而得到。根据这个性质推知，S 矩阵的第 i 行第 j 列的阵元 $S(i, j)$ 可由 S 矩阵的第一行所组成的 $1\times n$ 阶 S' 矩阵的阵元给出，如下所表示

$$S(i,\ j)=\begin{cases}S'(i+j-1), & i+j\leqslant n+1,\\ S'(i+j-n-1), & i+j>n+1。\end{cases}\tag{3}$$

有了关系式 (3)，存储量就大大减少。我们给 HTS 光谱仪配置一台 TP803 微型计算

收稿日期：1983年5月25日；收到修改稿日期：1983年7月26日

机*，在此计算机上按公式(2)求解255个未知数，所需机时约50分钟。

公式(3)只解决了存储量的问题，公式(2)的运算次数很多，致使耗费机时太长。如 $n=255$，需进行 $3n^2=195075$ 次加、减、乘的四则运算。

二、快速阿达玛变换解码方法

Harwit 和 Sloane 认为[2]快速阿达玛变换解码可按下列五个步骤进行。

(1) 将置换矩阵 π_1 作用于测量值矩阵 η，得到矩阵 W'，W' 与 η 的阵元满足如下关系：

$$\text{当 } k=\pi_1(i) \text{ 时，则 } W'(k)=\eta(i) \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n); \tag{4}$$

(2) 给 W' 矩阵增加一个零阵元，构成一个 $(n+1)\times 1$ 阶矩阵 W，即 $W=\begin{pmatrix}0\\W'\end{pmatrix}$；

(3) 求 $(n+1)\times 1$ 阶矩阵 z'

$$z'=H_{n+1}W=M_{n+1}^{(1)}M_{n+1}^{(2)}\cdots M_{n+1}^{(m)}W=\begin{pmatrix}*\\z\end{pmatrix}; \tag{5}$$

(4) 略去 z' 中的第一个阵元，得到矩阵 z；

(5) 将置换矩阵 π_2 作用于 z 得矩阵 Ψ'。Ψ' 与 z 的阵元满足如下关系：

$$\text{当 } t=\pi_2(P) \text{ 时，} \Psi'(t)=z(P) \quad (t=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。 \tag{6}$$

所需求解的光谱成分强度值矩阵 Ψ 为

$$\Psi=-\frac{2}{n+1}\Psi'。 \tag{7}$$

上面五个步骤中，除步骤3有四则运算外，其它步骤都是阵元的置换。所以关键的一步是求 z'，亦即求 H_{n+1}。H_{n+1} 矩阵可以表示成 m 个矩阵 $M_{n+1}^{(i)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 的乘积 $(n=2^m-1)$。Harwit 和 Sloane 指出[2]，$M_{n+1}^{(i)}$ 矩阵的每一行只有两个非零阵元，但并未给出这两个非零阵元的值及其位置。它们的值和位置可按下法求出，根据 H 矩阵和 M 矩阵的性质，即 $M_{n+1}^{(i)}=I_{2^{i-1}}\otimes H_2\otimes I_{2^{m-i}}$ 和 $H_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$，可知 $M_{n+1}^{(i)}$ 矩阵的阵元非 $(+1)$ 即 (-1)，且 (-1) 阵元一定处于主对角线上，每行上两个非零元素相差 2^{m-i} 个位置，从而即可导出 $M_{n+1}^{(i)}$ 矩阵之每一行两个非零阵元的表达式如下。

将 $M_{n+1}^{(i)}$ 的行和列均以 $0,\ 1,\ \cdots,\ n$ 来标记，并采用符号 $M(a,\ b)$ 表示 $M_{n+1}^{(i)}$ 矩阵第 a 行第 b 列的阵元。

1. 两个非零阵元都是 +1 的行

令 $P=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{n-1}{2}$。对于其中每一 P 值，令 $j=2P2^{m-i},\ 2P2^{m-i}+1,\ \cdots,\ [2P2^{m-i}+(2^{m-i}-1)]$。取这些 j 值中，满足 $j\leqslant n$ 者，则

$$M(j,\ j)=M(j,\ j+2^{m-i})=1, \tag{8}$$

这些 j 行的其它阵元皆为零；

* TP803 微型计算机是由北京工业大学电子仪器厂生产。存储量为 ROM12K、RAM16K，使用 TP12K BASIC 语言。

2. 两个非零阵元为 $+1$ 及 -1 的行

令 $P=0, 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}$。对于其中每一 P 值，令 $j=(2P+1)2^{m-i}$, $[(2P+1)2^{m-i}+1]$, $\cdots$, $[(2P+2)2^{m-i}-1]$。取这些 j 值中，满足 $j\leqslant n$ 者，则

$$M(j, j)=-1, \qquad M(j, j-2^{m-i})=1。 \tag{9}$$

这些 j 行的其它阵元皆为零。

为计算 z'，可逐步进行矩阵相乘

$$W^{(1)}=M_{n+1}^{(m)}W, \quad W^{(2)}=M_{n+1}^{(m-1)}W^{(1)}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad z'=M_{n+1}^{(1)}W^{(m)}。 \tag{10}$$

从公式(10)看出，快速解码的计算量只有 $2(n+1)m=2(n+1)\log_2(n+1)$ 次，与公式解码相比，计算量大为减少。对于 $n=255$，只需作 4096 次四则运算。

三、置换矩阵 π_1 和 π_2 的构造

采用快速阿达玛变换进行解码，首先须根据模板的编码矩阵 S，构造两个 $n\times1$ 阶的置换矩阵 π_1 和 π_2。

1. 构造 π_1 矩阵

模板的编码是 $n\times n$ 阶 M 序列的 S 矩阵，$n=2^m-1$，m 为自然数。将 S 矩阵的前 m 列组成一个新矩阵，若这新矩的第 i 行阵元所组成的二进制数之十进制数值为 R，则 π_1 矩阵的第 i 个阵元就为 k。

即

$$\pi_1(i)=k \quad (i=1, 2, \cdots, n)。 \tag{11}$$

例如，$m=3$ 时，$n=7$

$$S=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0&1&1\\0&1&0&0&1&1&1\\1&0&0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$S\text{ 的前 3 列为}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\text{各行对应的}\\\text{十进制数为}\end{matrix}\begin{matrix}7\\6\\5\\2\\4\\1\\3\end{matrix}\text{ 则 }\pi_1=\begin{pmatrix}7\\6\\5\\2\\4\\1\\3\end{pmatrix}。$$

2. 构造 π_2 矩阵

根据 Nelson 的方法[4]和左循环 S 矩阵的性质，我们给出更为简明的方法。先构造 $n\times m$ 阶矩阵 C，C 矩阵的 $(m-e+1)$ 列是 S 矩阵的第 j 列，e 和 j 满足关系：

$$\pi_1(j)=2^{e-1}\quad (e=1,\ 2,\ \cdots,\ m)。\tag{12}$$

若 C 矩阵的 i 行元素组成的二进制数之十进制数值为 k，则 π_2 矩阵的第 k 个阵元就为 i。即

$$\pi_2(k)=i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{13}$$

例如，按上述 $n=7$ 的 S 矩阵

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\text{各行对应的十进制数为}\begin{matrix}4\\2\\1\\5\\7\\6\\3\end{matrix}，\text{则}\ \pi_2=\begin{pmatrix}3\\2\\7\\1\\4\\6\\5\end{pmatrix}。$$

四、结　　果

对于确定的模板编码，置换矩阵 π_1 和 π_2 只要计算一次，就可作为数据存储在程序中。下面就是 TP803 微型计算机计算 π_1 和 π_2 矩阵的程序，程序中的数据就是模板编码矩阵的第一行。算出的 π_1 矩阵和 π_2 矩阵分别见快速解码程序中的第一、第二组数据。

```
10 INPUT M:N=2↑M-1:DIM S(N),P(N),G(N)
20 FOR I=1 TO N:READ S(I):NEXT I
30 FOR I=1 TO N:P(I)=0
40 FOR J=1 TO M:IF I+J>N+1 THEN 60
50 SP=S(I+J-1):GOTO 70
60 SP=S(I+J-N-1)
70 P(I)=P(I)+SP*2↑(M-J):NEXT J
80 NEXT I
85 FOR I=1 TO N:LPRINT P(I);:NEXT I
90 FOR I=1 TO N:K=0
100 FOR E=1 TO M:T=2↑(E-1):J=0
110 J=J+1:R=P(J)
120 IF T=R THEN 130
125 GOTO 110
130 IF I+J>N+1 THEN 150
140 SQ=S(I+J-1):GOTO 160
150 SQ=S(I+J-N-1)
160 K=K+SQ*2↑(E-1):NEXT E
170 G(K)=I
175 NEXT I
180 FOR I=1 TO N:LPRINT G(I);:NEXT I
220 DATA 0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,1,0,0,0,1,1,1,1,0,1,0,0,0,0
230 DATA 1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1,1,1,0,1,0
240 DATA 1,0,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0
250 DATA 0,1,0,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,0,0,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1,0,0
260 DATA 1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,0,1,1,0
270 DATA 0,1,1,1,0,0,1,1,1,1,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0
280 DATA 1,1,1,0,1,0,1,1,1,1,0,1,1,0,1,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,0,1,0
290 DATA 0,1,1,0,1,0,1,1,0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,1,1,1,0,1
300 DATA 1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,1,0,0,1,0,0,0
310 DATA 1,1,1
```

```
10 INPUT M:N=2↑M-1:C=2↑(M-1)-1
20 DIM P(N),G(N),Y(N),W(N),X(N)
30 FOR I=1 TO N:READ P(I):NEXT I
40 FOR I=1 TO N:READ G(I):NEXT I
50 FOR I=1 TO N:READ Y(I):NEXT I
60 FOR I=1 TO N:W(P(I))=Y(I):NEXT I
70 FOR I=M TO 1 STEP -1:Q=2↑(M-I)
80 FOR P=0 TO C:J=2*P*Q:K=(2*P+1)*Q-1
90 IF J>N THEN 110
100 FOR R=J TO K:X(R)=W(R)+W(R+Q):NEXT R
110 NEXT P
120 FOR P=0 TO C:JP=(2*P+1)*Q:KP=(2*P+2)*Q-1
130 IF JP>N THEN 150
140 FOR R=JP TO KP:X(R)=W(R-Q)-W(R):NEXT R
150 NEXT P
160 IF I=1 THEN 180
170 FOR A=0 TO N:W(A)=X(A):NEXT A
180 NEXT I
190 DIM Z(N):B=-2/(N+1)
200 FOR I=1 TO N:Z(G(I))=X(I)*B+10:NEXT I
210 FOR I=1 TO N:LPRINT Z(I);:NEXT I
800 DATA 16,32.64,128,1,2.5,11,22,44.88,177,99,199,143,30,61
810 DATA 122,244.232.208,161.67,135,15,31,63,127,255.254,252
820 DATA 249,242.228.200.144,33,66.133.10.20,41,83.167,79,159
830 DATA 62,125.250,245,234.213,170,85,171,87,174,92,184,112
840 DATA 224,193,131,6.12,24.49,98,197,138.21,43,86,172,89,179
850 DATA 102,204,153,50,101,203,151,47,95,191,126,253,251,247
860 DATA 239.222,188,121,243.230,205,155,55.110,221,187,119,238
870 DATA 220.185,114.229,202.149,42,84,169.82,165.74,148,40,81
880 DATA 162,68,137,18,37,75,150.45,90,180,104,209,163.70,140
890 DATA 25,51,103,206.156.57,115,231,207,158,60,120,241,227
900 DATA 198,141,27,54.108,216,176,97,194,132,8,17.34,69,139,23
910 DATA 46.93,186,117,235,215,175,94,189,123,246,237,219,183
920 DATA 111,223,190,124,248,240,225,195,134,13,26,52,105,211
930 DATA 166.77,154,53,107,214.173,91,182,109,218.181,106,212
940 DATA 168,80,160,65,130.4,9,19,39,78.157,59,118.236,217,178
950 DATA 100,201,146,36,73,147,38,76,152.48,96,192.129,3,7,14
960 DATA 29,58,116,233.210,164,72,145,35,71,142,28,56,113,226
970 DATA 196,136
990 DATA 8.7,238.6,213,237,65,5,40,212,25,236,159,64,188,4,163
1000 DATA 39,249.211,122,24.134,235,70,158.15,63,255,187,150,3
1010 DATA 125,162,216.38,227,248,230,210,116,121,45.23,245,133
1020 DATA 194,234,82,69,138.157,224,14,78.62,109,254,143,186,35
1030 DATA 149.97,2,72,124,165,161,42,215,10,37,111.226.84.247
1040 DATA 118.229,127,209,55,115.57,120,113,44,74,22,53,244,171
1050 DATA 132,207,193,199,233,197,81,100,68,191,137,153,156,205
1060 DATA 223,179,13,130,77,202,61,169.108,104,253,242,142,220
1070 DATA 185,51,34,91,148.20.96,176,1,151,71,16,123,135,164
1080 DATA 250,160,189,41,26,214,66,9,239,36,98,110.144,225,79
1090 DATA 83,139,246,195,117,46,228,231.126,217,208,200,54,172
1100 DATA 114,75,56,58,119,128,112,85,43,11,73,166,21,177,52
1110 DATA 92,243.221,170,105,131,203,206,180,192,154,198,101
1120 DATA 232,218,196,47,80,140,99,145,67,240,190,27,136,251
1130 DATA 152,17,155,102,204,181,222,106,178,93,12,167,129,86
1140 DATA 76,59,201,173,60,174,168,87,107,94,103,182,252,18
1150 DATA 241,28,141,146,219,48,184,89,50,30,33,32,90,31,147
1160 DATA 49,19,29,95,183,175,88
1180 DATA 4,6,6,4,5,2,2,3,6,3,2,3,7,7,6,2,2,6,7,7,6,2,2,3,7
1190 DATA 7,4,7,7,4,3,2,3,7,4,3,5,5,4,7,8,6,4,7,3,5,6,7,6,3
1200 DATA 5,5,3,6,7,9,8,6,3,3,2,6,9,6,3,4,3,3,6,7,6,6,5,6,3
1210 DATA 2,6,4,3,4,4,5,2,2,3,2,3,5,3,4,6,7,6,4,7,5,3,3,4,1
1220 DATA 2,5,3,4,6,6,5,4,2,1,3,5,6,8,7,4,5,3,4,5,3,2,1,3,3
1230 DATA 3,1,1,4,5,2,3,2,2,3,3,1,4,2,7,6,2,0,2,7,6,3,2,1,1
1240 DATA 0,1,2,6,6,6,5,3,4,6,8,6,2,2,4,1,1,1,3,5,6,8,6,6,9
1250 DATA 11,7,7,5,3,5,1,3,3,6,3,6,6,5,3,3,5,4,3,5,6,2,2,2,5
1260 DATA 2,4,4,7,5,0,1,4,3,2,3,4,2,5,6,7,7,6,4,5,7,5,7,5,2
1270 DATA 4,8,6,4,10,10,9,6,9,7,6,5,6,6,5,5,5,6,2,5,7,5,6,4,6
1280 DATA 5,5,3,6,6
1290 END
```

下面是 TP803 微型计算机作快速解码的程序，程序中的第三组数据是测量值矩阵，计算结果绘制成如图 1 所示的光谱曲线，与以前用大型的 DJS-6 计算机算得的结果完全相同。快速解码的机时仅需一分钟，这样就可进行实时的样品分析。

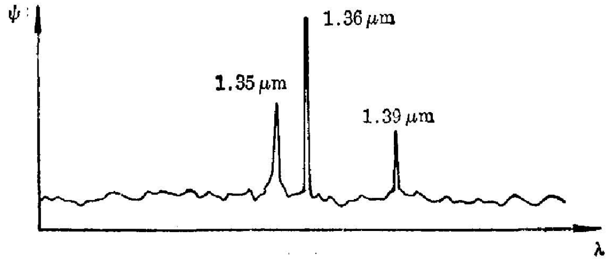

图 1　HTS 光谱仪测得的汞灯的发射光谱图

Fig. 1　Emission spectrum of a mercury lamp measured by HTS

参 考 文 献

[1] M. Harwit, J. A. Decker Jr.; «*Modulation Techniques in Spectrometry, in E. Wolf (ed), Progress in Optics*» Vol. XII, (Amsterdam, 1974), 101.

[2] M. Harwit, N. J. A. Sloane; «*Hadamard Transform Optics*», (Academic Press, 1979).

[3] 张炳泉;«光学学报», 1983, **3**, No. 8 (Nov), 758.

[4] E. D. Nelson, M. L. Fredman; *J. O. S. A.*, 1970, **60**, No. 12 (Dec), 1667.

Method of decode in Hadamard transform spectroscopy

ZHANG BINGQUEN

(*Department of Physics, Nankai University, Tianjin*)

(Received 25 May 1983; revised 26 July 1983)

Abstract

This paper gives an expression of the two nonzero elements of $M^{(4)}_{n+1}$ Matrices in the Fast Hadamard Transform. The methods of formula decoding and fast decoding in the Hadamard transform spectroscope are also given.