

# 有线性摆动器和轴向引导磁场的自由电子激光器的自发辐射及受激喇曼辐射

尹元昭

(中国科学院电子研究所)

## 提 要

本文研究的自由电子激光器具有线性摆动器及轴向引导磁场。强流相对论冷电子束通过位在这些磁场中的平行平板波导。我们计算了它的自发辐射和受激喇曼辐射,给出了单位频率单位立体角的自发辐射功率和在电子静止坐标中的横电波(TE模)的受激喇曼辐射的色散关系和增益公式。

## 一、引 言

由于喇曼型自由电子激光器的电子束电流密度很大,为了克服空间电荷造成的径向发

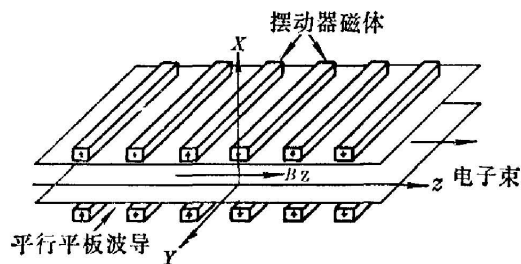


图1 具有线性摆动器和轴向引导磁场的自由电子激光器结构简图,强流相对论冷电子束通过位在这些磁场中的平行平板波导

Fig. 1 Configuration of the free-electron laser with a linear wiggler and axial guide field. Relativistic cold electron beam passes through the parallel-plate waveguide

散,轴向引导磁场是保证电子束得以沿轴前进所必不可少的。轴向磁场的另一个重要作用是产生谐振效应使增益大大增加<sup>[1~4]</sup>。在螺旋摆动器中,我们可以在这个复合磁场中得到稳定的电子轨道<sup>[5,6]</sup>。但因受通过线圈的电流限制,不可能获得很强的泵浦磁场,特别难以在长脉冲和连续波状态工作,此外不易制成磁场的空间周期和强度逐渐变化的摆动器。而这种逐渐变化正是提高自由电子激光器效率的重要措施<sup>[7]</sup>。线性摆动器恰恰与此相反,它是由一组永久磁棒组成,如图1所示。利用钕钴磁钢做磁体可得到非常强的泵浦磁场,并且很容易改变它的空间周期与强度。它可工作在长脉冲与

连续波状态,不需庞大的供电设备与精确的同步装置,但是在与轴向磁场组成的复合磁场中,旁轴电子的轨道是不稳定的,有持续的横向漂移<sup>[4,8,9]</sup>。然而我们已经证明在条件<sup>[4]</sup>

$$\left| \left( \frac{\Omega_w}{\Omega_f} \right) \left( \frac{\Omega_w}{\Omega_f - k_w v_0} \right) \right| \ll 1 \quad (1)$$

满足的情况下,旁轴电子漂移是不大的,不致对自由电子激光器的工作特性产生严重的影响。式中  $\Omega_w = (eB_w/m_0c\gamma_0)$ ,  $\Omega_f = (eB_f/m_0c\gamma_0)$  分别是电子在摆动器场  $B_w$  及轴向磁场  $B_f$  中的回旋频率,  $-e$  和  $m_0$  分别是电子的电荷及静止质量,  $c$  是真空中光速,  $\gamma_0 = [1 -$

$(v_0/c)^2]^{1/2}$ ,  $\beta_0 = (v_0/c)$ ,  $v_0$  是电子的初始轴向速度,  $k_w = (2\pi/L_w)$ ,  $L_w$  是摆动器的空间周期。当然我们还要求电子的轴向振荡很少, 不致引起相位失调而干扰自由电子的受激辐射。

此外, 我们还假设电磁扰动在传播方向  $z$  上的变化如  $\exp[i(kz - \omega t)]$  而且其波长足够短, 以致横向空间变化可以忽略, 即

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \ll \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

我们将在满足条件(1)和(2)下研究强流相对论冷电子束通过位在线性摆动器及轴向引导磁场中的平行平板波导时产生的自发辐射及与横电波(TE模)  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_z \mathbf{e}_z$  相互作用的受激喇曼辐射。

## 二、自发辐射

在满足条件(1)的情况下, 线性摆动器的场可简化为

$$B_x = B_w \cos(k_w z), \quad B_y = 0, \quad B_z = 0 \quad (3)$$

相应地运动方程可简化为

$$\left. \begin{aligned} (dv_x/dt) &= -\Omega_f v_y, \\ (dv_y/dt) &= \Omega_f v_x - \Omega_w v_z \cos(k_w z), \\ (dv_z/dt) &= \Omega_w v_y \cos(k_w z). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

利用条件(2), 我们可求得运动方程(4)的解为

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_1 \cos \omega_0 t - v_1 \cos \Omega_f t, \\ v_y &= v_2 \sin \omega_0 t - v_1 \sin \Omega_f t, \\ v_z &= v_0 - \frac{\Omega_w v_2}{4\omega_0} \cos 2\omega_0 t - \left[ \frac{\Omega_w v_1}{2(\omega_0 - \Omega_f)} - \frac{\Omega_w v_1}{2(\omega_0 + \Omega_f)} \right] \cos(\omega_0 - \Omega_f) t, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= (v_1/\omega_0) \sin \omega_0 t - (v_1/\Omega_{11}) \sin \Omega_{11} t, \\ y &= -(v_2/\omega_0) \cos \omega_0 t + (v_1/\Omega_{11}) \cos \Omega_{11} t, \\ z &= v_0 t - \frac{\Omega_w v_2}{8\omega_0^2} \sin 2\omega_0 t - \left[ \frac{\Omega_w v_1}{2(\omega_0 - \Omega_f)} - \frac{\Omega_w v_1}{2(\omega_0 + \Omega_f)} \right] \sin(\omega_0 - \Omega_f) t, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

它们满足初始条件: 当  $t=0$  时,  $x=y=z=0$ ,  $v_x=v_y=0$ ,  $v_z \cong v_0$ 。其中  $\omega_0 = k_w v_0$ ,  $v_1 = [\Omega_w \Omega_f v_0 / (\Omega_f^2 - \omega_0^2)]$ ,  $v_2 = [\Omega_w k_w v_0^2 / (\Omega_f^2 - \omega_0^2)]$ 。自发辐射公式为<sup>[10]</sup>

$$\frac{dP}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{v} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] dt \right|^2 \quad (7)$$

其中  $P$  与  $\Omega$  分别是自发辐射的功率及所占的立体角,  $\omega$  与  $\mathbf{k}$  分别是自发辐射的频率与传播常数矢量,  $\boldsymbol{\eta} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$  是辐射方向上的单位矢量, 现在我们沿  $z$  轴观察辐射, 则  $\theta=0$ 。将(5)式和(6)式代入(7)式, 并利用贝塞耳函数  $J_n$  的性质, 对于基模我们得到自发辐射系数为

$$\frac{dP}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \omega^2 \left\{ J_0 \left[ \frac{\Omega_w v_2}{8\omega_0^2} k \right] J_0 \left[ \frac{\Omega_w v_1}{2(\omega_0 - \Omega_f)^2} k \right] J_0 \left[ \frac{\Omega_f v_1}{2(\omega_0 + \Omega_f)^2} k \right] \right\}^2$$

$$\times \left( \frac{N\pi}{\omega_0} \right)^2 \frac{\Omega_w^2 v_0^2}{|\omega_0^2 - \Omega_f^2|} \frac{\sin(kv_0 - \omega + \omega_0)(N\pi/\omega_0)}{(kv_0 - \omega + \omega_0)(N\pi/\omega_0)} \left[ \frac{\sin(kv_0 - \omega + \omega_0)(N\pi/\omega_0)}{(kv_0 - \omega + \omega_0)(N\pi/\omega_0)} + \frac{2\Omega_w \Omega_f k_w v_0}{(\omega_0 - \Omega_f)^2} \frac{\sin(kv_0 - \omega + \Omega_f)(N\pi/\omega_0)}{(kv_0 - \omega + \Omega_f)(N\pi/\omega_0)} \right], \quad (8)$$

从(8)式不难看出自发辐射由两部分组成:第一部分来自自由电子激光模的贡献,它在  $kv_0 - \omega + \omega_0 = 0$  或者  $\omega = (1 + \beta)\gamma_0^2 \beta c k_w$  时达到极大。

第二部分来自回旋模的贡献,它在  $k_w k v_0 - \omega + \Omega_f = 0$  或  $\omega = (1 + \beta)\gamma_0^2 \Omega_f$  时可达到极大。但是因为受到条件(1)的约束,回旋模的贡献要比自由电子激光模的贡献少得多,可以略去。我们用电子计算机对(8)式进行数值分析,结果如图2所示,其最大值处在由  $\omega = (1 + \beta)\gamma_0^2 \beta c k_w$  决定的频率上,最大辐射时的频率  $\omega_r$  为  $5.67 \times 10^{11}$  Hz,相应波长为 3.3 mm,相对频宽为 1.75%。  
 $B_w = 1$  k Gauss,  $B_f = 0.5$  Gauss,  $L_w = 2$  cm, 电子能量为 500 keV ( $\gamma \simeq 2$ ),  $N = 50$ 。

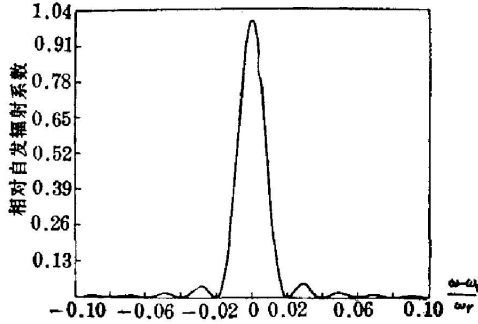


图2 相对论电子束通过线性摆动器及轴向磁场时的自发辐射谱

Fig. 2 Spontaneous emission spectrum for relativistic electron beam passing through linear-wiggler and axial magnetic field

迄今文献中只对螺旋摆动器的自发辐射作过计算<sup>[1,11]</sup>。与本文对线性摆动器的结果相似,谱线形状也由函数  $(\sin x/x)$  决定,但是在螺旋摆动器有稳定的电子轨道,所以不受条件(1)的约束,在自由电子激光模与回旋模之间有很强的模式竞争,在一定条件下回旋模可超过自由电子激光模在自发辐射中占优势<sup>[11]</sup>。在这两种摆动器中都存在谐振效应,即当  $\omega_0$  接近  $\Omega_{11}$  时,自发辐射大大增强。

### 三、受激喇曼辐射

为了更清楚地阐明自由电子激光器的受激喇曼辐射特性,我们在电子静止坐标中进行处理。首先将线性摆动器磁场(3)式通过劳伦兹变换,变换到电子静止坐标成为入射电磁波(泵浦波)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \gamma_0 \beta B_w \cos(k_i z + \omega_i t) \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{B}_i &= \gamma_0 B_w \cos(k_i z + \omega_i t) \mathbf{e}_x, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中  $k_i = \gamma_0 k_w$  和  $\omega_i = \gamma_0 k_w v_0$  分别是入射波的传播常数和频率。这个入射波与电子束中的负能空间电荷波

$$\mathbf{E}_l = E_l \cos(k_l z + \omega_l t) \mathbf{e}_z. \quad (10)$$

相互作用产生反向散射波

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_s &= E_s \cos(k_s z - \omega_s t + \phi_s) \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{B}_s &= -(ck_s/\omega_s) E_s \cos(k_s z - \omega_s t + \phi_s) \mathbf{e}_x. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这是三波相互作用问题,其频率与波数满足下列关系

$$\omega_s = \omega_l - \omega_i, \quad k_s = k_l - k_i. \quad (12)$$

关系式(12)就是在电子静止坐标中的能量与动量守恒关系,也正是喇曼散射的基本特征。这

里需要指出的是当我们从实验室坐标变换到电子静止坐标时横电波的  $E_y$  和  $B_x$  分量增大  $(1+\beta)\gamma$  倍而  $B_z$  分量不变, 所以在电子静止坐标中我们可以不考虑  $B_z$  的作用。此外轴向引导磁场在两个坐标系中却是一样的。电子在这三个波的作用下其运动速度可表示为

$$\mathbf{v} = [v_x^i \cos(k_i z + \omega_i t + \varphi_i^i) + v_x^s \cos(k_s z - \omega_s t + \varphi_s^s)] \mathbf{e}_x + [v_y^i \cos(k_i z + \omega_i t + \varphi_i^i) + v_y^s \cos(k_s z - \omega_s t + \varphi_s^s)] \mathbf{e}_y + [v_z^i \cos(k_i z + \omega_i t + \varphi_i^i)] \mathbf{e}_z, \quad (13)$$

其中  $v_x^i, v_y^i, v_x^s, v_y^s$  和  $v_z^i$  是速度幅值,  $\varphi_i^i, \varphi_s^s$  和  $\varphi_i^i$  是相应的相位常数。

我们将(9)、(10)、(11)和(13)式代入运动方程

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e[\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_l + (1/c)\mathbf{v} \times (\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_l)],$$

连续性方程

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0,$$

其中电子密度  $n = n_0 + n_l$ ,  $n_0$  是平衡态电子密度,  $n_l$  是电子束的密度调制和波动方程

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_s}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t},$$

其中  $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}$  是电子束的电流密度。利用关系式(12)和处理螺旋摆动器的相同技术<sup>[12]</sup> 经过线性化, 最后得到在电子静止坐标中具有线性摆动器及轴向引导磁场的自由电子激光器的受激喇曼辐射的色散关系

$$\left( \omega_s^2 - c^2 k_s^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_s^2}{\omega_s^2 - \Omega_f'^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_i^2} \right) = \frac{1}{4} \frac{\omega_i}{\omega_i - \Omega_f'^2} \left( \frac{\omega_s}{\omega_s^2 - \Omega_f'^2} + \frac{k_s v_0}{\omega_s} \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \Omega_f'^2} \right) \frac{\omega_p^2 \Omega_w'^2 \omega_s k_i v_0 \gamma_0^2}{\omega_i^2}, \quad (14)$$

其中  $\Omega_w' = \frac{e B_w}{m_0 c} \gamma_0$  和  $\Omega_f' = e B_f / m_0 c$  分别是在电子静止坐标中电子在摆动器磁场及轴向引导磁场中的回旋频率,  $\omega_p = (4\pi e^2 n_0 / m_0 \gamma_0)^{1/2}$  是不变等电子体频率。我们已经得到在实验室坐标中的色散关系为<sup>[4]</sup>

$$\left[ \omega^2 - ck^2 - \frac{\omega_p^2 (\omega - v_0 k)^2}{(\omega - v_0 k)^2 - \Omega_f'^2} \right] \left\{ \left[ \omega - v_0 (k + k_w) \right]^2 - \frac{\omega_p^2}{\gamma_0^2} \right\} = -\frac{\omega_p^2}{4} \frac{\Omega_w'^2 v_0^2 k_w}{\Omega_f'^2 - v_0^2 k_w^2} \left[ \frac{(\omega - v_0 k)^2}{(\omega - v_0 k)^2 - \Omega_f'^2} + \frac{v_0^2 k_w}{\Omega_f'^2 - v_0^2 k_w^2} \left( \frac{v_0}{c^2} \omega - k \right) \right] (k + k_w), \quad (15)$$

其中  $\omega$  和  $k$  分别是在实验室坐标中横电波 (TE 模) 的频率与传播常数。通过劳伦茨变换不难证明色散关系(14)与(15)式是完全等价的, 即它们可以相互变换。

这里我们要指出在这两个坐标系中理论的出发点是不同的。在电子静止坐标中我们研究的是泵浦波, 负能空间电荷波及反向散射波三波相互作用, 这三个波满足能量及动量守恒关系(12)式, 这正是喇曼散射的特征, 也是将自由电子激光器称为受激喇曼辐射的由来。而在实验室坐标中我们研究的是横电波 (TE 模) 与负能空间电荷波在线性摆动器中的两波相互作用。而它们的结果可用劳伦兹变换相互变换因而是完全等价的。这种等价性也证明了我们在这二个坐标系中所用的不同方法, 都是正确的。因为我们已对在实验室坐标中的色散关系(15)式进行了详细的数值分析<sup>[4]</sup>, 所以就不再对电子静止坐标中的色散关系(14)式作数值分析了。令  $\omega_s = \text{Re}(\omega_s) + i \text{Im}(\omega_s)$  及  $\text{Re}(\omega_s) \gg \text{Im}(\omega_s)$ , 并利用(12)式求得(14)式的近似增益表达式

$$\text{Im}(\omega_s) = \frac{\Omega_w}{4} \frac{1}{|1-R^2|} \left[ \frac{\omega_p \gamma_0 (1+\beta)}{k_w v_0} \right]^{1/2} \gamma_0, \quad (16)$$

但是我们已求得在实验坐标中的增益为<sup>[4]</sup>

$$\text{Im}(\omega) = \frac{\Omega_w}{4} \frac{1}{|1-R^2|} \left[ \frac{\omega_p \gamma_0 (1+\beta)}{k_w v_0} \right]^{1/2}, \quad (17)$$

两个坐标系的增益之间关系式为

$$\text{Im}(\omega) = \frac{\text{Im}(\omega_s)}{\gamma_0}. \quad (18)$$

这正是劳伦兹变换所预期的结果<sup>[13]</sup>当  $R=1$  时发生谐振效应, 增益趋于无穷大。但是我们的线性理论不能用于谐振附近区域, 为了计算谐振时的增益必需用非线性理论。然而从线性理论可知, 当  $R \rightarrow 1$  时, 自由电子激光器的增益将大大增加, 这就说明了轴向引导磁场的第二个作用。

#### 四、结 束 语

本文首次计算了有线性摆动器和轴向引导磁场的自由电子激光器的自发辐射和在电子静止坐标系中的受激喇曼散射。我们的目的是为了引起人们对线性摆动器的重视。关于喇曼型自由电子激光器的理论与实验研究大都是属于螺旋摆动器的, 但是如果我们能想出新的办法完全克服线性摆动器中傍轴电子发生横向漂移的缺点则将导致新一代的摆动器的产生, 从而推动自由电子激光器的实用化。

自发辐射的研究有助于我们确定实现受激辐射的可能性, 而在电子静止坐标与实验室坐标中的色散关系通过劳伦兹变换而相互等价则证明了我们在二个坐标系中所做的理论处理的正确性。关于增益与激光器的各种参量的关系的数值分析可参见文献[4]。

本文是在美国麻省理工学院完成的, 与 G. Bekefi 教授进行了有益的讨论, 特此表示感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] H. P. Freund, P. Sprangle *et al.*; *Phys. Rev. (A)*, 1981, **A24**, No. 4 (Oct), 1965.
- [2] H. P. Freund, P. Sprangle *et al.*; *NRL Memorandum Report* 4763, 1982.
- [3] R. H. Jackson *et al.*; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1983, **QE-19**, No. 3 (Mar), 346.
- [4] Yuan-Zhao Yin, G. Bekefi; to be published in *J. Appl. Phys.*
- [5] L. Friedland; *Phys. Fluids*, 1980, **23**, No. 12 (Dec), 2376.
- [6] H. P. Freund, A. T. Drobot; *Phys. Fluids*, 1982, **25**, No. 4 (Apr), 736.
- [7] H. P. Sprangle, Cha-Mei Tang *et al.*; *Phys. Rev. (A)*, 1980, **A21**, No. 1 (Jan), 302.
- [8] J. A. Pasour *et al.*; *J. Appl. Phys.*, 1982, **53**, No. 11 (Nov), 7174.
- [9] C. W. Roberson *et al.*; *NRL Memorandum Report* 5013, 1983.
- [10] G. Bekefi; *Radiation Processes in Plasma* (Wiley, New York, 1966).
- [11] W. A. McMullin, R. C. Davidson; *Phys. Rev. (A)*, 1982, **A25**, No. 6 (Jun), 3130.
- [12] 尹元昭; «电子通讯», 1982, **4**, No. 5 (Sep), 312.
- [13] K. R. Chu *et al.*; *IEEE Trans Microwave Theory & Techniques*, 1979, **MTT-27**, No.2 (Feb), 173.

**Spontaneous emission coefficient and stimulated Raman  
emission of FEL with a linearly polarized wiggler  
and axial guide field**

YIN YUANZHAO

*(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)*

(Received 12 May 1983, revised 19 December 1983)

**Abstract**

The free electron laser with a linearly polarized wiggler and axial guide field has been studied. A relativistic, cold electron beam passes through a parallel-plate waveguide in these magnetic fields. The spontaneous emission coefficient and the dispersion equation of the stimulated Raman emission of the transverse electric wave (TE mode) in the electron beam reference-frame are calculated. Its growth rate is given. When the cyclotron frequency of the electron is equal to the frequency of the pump wave in the electron beam reference-frame, the intensities of both the spontaneous and stimulated emissions increase sharply due to the resonance.