

用高斯近似计算单模 α 光纤的色散参数

盛 嘉 茂

(武汉邮电科学研究院)

提 要

本文提出一个计算单模 α 光纤波导色散参数的新的简单方法。利用它检验了两种常用的高斯近似方法对色散参数计算的影响。提出了功率比等效的光斑的新定义,并给出了用它近似计算色散参数的解析公式,计算结果与数值方法的结果比较,两者较好地符合。

一、引 言

单模光纤是一种很有希望的高带宽、低损耗传输介质。在对它的理论进行分析时发现,光纤中电磁场的分布很接近于高斯型。例如,对径向折射率分布为

$$n(r) = \begin{cases} n_1 [1 - 2\Delta(r/a)^\alpha]^{1/2} & (r \leq a) \\ n_2 = n_1(1 - 2\Delta)^{1/2} \approx n_1(1 - \Delta) & (r > a) \end{cases} \quad (1)$$

的 α 光纤。对各种 α 值,高斯光束到基模的最大功率传输系数,均可达99.5%以上,并且最大值几乎都出现于实际的单模工作区内^[1]。因此高斯近似可用于计算单模光纤的各种性质,如损耗和激发等,获得了简单而实用的公式,但是利用高斯近似来推导单模光纤色散的近似解析公式还很少见报道,用高斯场代替实际场来计算色散,可近似到什么程度还不很清楚。

然而色散是光纤的最重要性质之一,单模光纤色散计算中主要涉及的归一化传播常数 b 对归一化频率 ν 的一、二阶导数,即波导色散参数,现有的许多解析近似公式都不能足够精确地计算这两个导数^[2],通常只能用数值方法计算,且都限于计算阶跃型光纤。本文的目的是考察高斯近似对色散参数计算的影响,找出简单的计算单模 α 光纤色散参数的方法。

二、基本方法

对弱导光纤(即 $n_1 - n_2 \ll 1$),光纤中的场是近于线极化的,其横向分量可写为

$$E_y = AE(r), \quad H_y = -n\Delta(\epsilon_0/\mu)^{1/2}E(r), \quad (2)$$

其中 A 是常数, $n \approx n_1 \approx n_2$, ϵ_0 和 μ 分别是真空的介电常数和导磁率。 $E(r)$ 满足标量波动方程

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} + [k^2 n^2(r) - \beta^2] E = 0, \quad (3)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$, λ 是真空中波长, β 是纵向传播常数,对于径向折射率分布光纤可以把(1)式代入(3)式,得光纤芯中波导方程为

收稿日期:1982年10月5日;收到修改稿日期:1983年4月8日

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 F(R)}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dF(R)}{dR} + (u^2 - \nu^2 R^\alpha) F(R) &= 0, \\ u^2 &= a^2(n_1^2 k^2 - \beta^2), \quad w^2 = a^2(\beta^2 - n_2^2 k^2), \\ \nu^2 &= (u^2 + w^2), \quad b = 1 - (u^2/\nu^2) = [(\beta^2/k^2) - n_2^2] [n_1^2 - n_2^2]^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 $F(R) = E(r)$, a 为光纤芯半径, $R = (r/a)$, ν 为归一化频率, b 为归一化传播常数, 考虑边界条件可得本征方程

$$\left. \frac{dF(R)}{dR} \right|_{R=1} = -\frac{wk_1(w)}{k_0(w)} \cdot F(R) \Big|_{R=1}, \quad (5)$$

其中 k_0 、 k_1 分别为零、一阶的第二类修正贝塞耳函数。通常的计算方法是从(4)式和(5)式解出传播常数, 然后作两次微商, 这些数值计算是冗长而复杂的。另一方面, 从物理上考虑, 单模光纤的色散是不同波长的能量传播速度不同引起的, 而能量传播速度与电磁场的分布, 或者说与能量密度和能流密度是直接有关的, 实际上 Brown 早已得出如下的普遍关系:

$$\frac{1}{v_p v_g} = \frac{1}{c^2} \int S_2 n^2(x, y) dx dy / \int S_2 dx dy, \quad (6)$$

v_p 和 v_g 分别代表相速和群速, S_2 是时间平均的坡印亭 (Poynting) 矢量的纵向分量。Krumholz 等^[8]又进一步对 α 光纤得到

$$\rho_{\text{芯}} = \frac{\alpha + 2}{2\alpha} (b\nu)' + \frac{\alpha - 2}{2\alpha} b, \quad (7)$$

其中 $\rho_{\text{芯}}$ 代表光纤芯中功率流与总功率流之比, 撇号代表对 ν 求导数。

下面我们把这个结果和高斯近似结合起来, 提出一个简单的计算波导色散参数的新方法。从(7)式对 ν 求导数得

$$(b\nu)'' = \frac{2\alpha}{\alpha + 2} \rho_{\text{芯}}' + \frac{2 - \alpha}{(\alpha + 2)\nu} [(b\nu)' - b]. \quad (8)$$

而利用(3)式, 可以得到^[4]

$$\rho_{\text{芯}} = \int_0^1 F^2(R) R dR / \int_0^\infty F^2(R) R dR. \quad (9)$$

若实际场用高斯型场来近似, 即设

$$F(R) = \frac{2}{ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-(R/x)^2], \quad (10)$$

其中 w_0 是束宽参数, 或称光斑, $x = (w_0/a)$ 称为归一化的光斑, 代入(9)式得到

$$\rho_{\text{芯}} = 1 - \exp(-2/x^2). \quad (11)$$

把(11)式代入(7)、(8)式就得到计算色散参数的简单公式

$$\left. \begin{aligned} (b\nu)' &= \frac{2\alpha}{\alpha + 2} [1 - \exp(-2/x^2)] + \frac{2 - \alpha}{\alpha + 2} b, \\ (b\nu)'' &= \frac{-8\alpha}{(\alpha + 2)x^3} \exp(-2/x^2) x' + \frac{2 - \alpha}{(\alpha + 2)\nu} [(b\nu)' - b]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

可以看出(12)式有以下特点:

(1) 与传统方法不同, 不仅利用了传播常数的知识, 也利用了场分布的知识来计算色散。比传统方法减少一次求导运算, 公式中的 x 和 b 已有较好的近似式可利用。

(2) 计算具有递推性质, 由 b 算出 $(b\nu)'$, 再由 $(b\nu)'$ 和 b 算出 $(b\nu)''$ 。

(3) 这样的解析公式有较为明显的物理意义。例如, 从(8)式或(12)式可见, 右边第一

项为正,第二项中 b' 也是正的,因此当 $\alpha \leq 2$ 时,对有限的 ν 值, $(b\nu)''$ 不可能为零。一般计算中, $(b\nu)''$ 与波导色散成正比,所以 $\alpha \leq 2$ 的光纤中波导色散不为零。这从我们的公式看是明显的, Snyder 也曾得出同样的结论^[5],但他是用 WKB 方法在大 ν 值时的近似,经过微商运算才得出的。

三、高斯近似法对色散计算的影响

利用(12)式可以考察高斯近似法对色散参数计算的影响。

一种常用的方法其 x 是由变分法来确定的。从传播常数的稳态表达式为^[6]

$$\beta^2 = \frac{\int_0^\infty k^2 n^2(r) E^2(r) r dr - \int_0^\infty \left[\left(\frac{dE}{dr} \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} E^2(r) \right] r dr}{\int_0^\infty E^2(r) r dr} \quad (13)$$

利用(1)、(4)、(10)式,通过简单计算可得 w^2 的稳态表达式

$$w^2 = \frac{2}{x^2} + \nu^2 \left[\exp(-2/x^2) + \int_0^{2/x^2} \exp(-t) \left(\frac{tx^2}{2} \right)^{\alpha/2} dt \right], \quad (14)$$

其中 $t = 2R^2/x^2$, 对 x 求导数并使之为零,得到确定 x 的方程

$$\frac{d\nu}{4} (\sqrt{2})^{-\alpha} x^{\alpha+2} \gamma \left[\frac{\alpha}{2} + 1, \frac{2}{x^2} \right] = 1, \quad (15)$$

其中 γ 代表不完全的 Gamma 函数。用数值方法可从(15)式中解出 x , 图1中短虚线给出 $\alpha=8$ 的例子,把 x 代入(14)式就得到 w , 然后用(12)式就可算出色散参数。结果表明,这样算出的 $(b\nu)'$ 近似误差较小,而 $(b\nu)''$ 的误差相当大,可达百分之几十。但是这种变分法还能定性地给出了色散参数的特征,例如阶跃光纤 $(b\nu)''$ 的零点应在 $\nu=3.01$ ^[7], 用变分法算出在 2.7~2.8 之间。在实际单模工作范围内,这种近似算出的 $(b\nu)''$ 一般小于精确值。

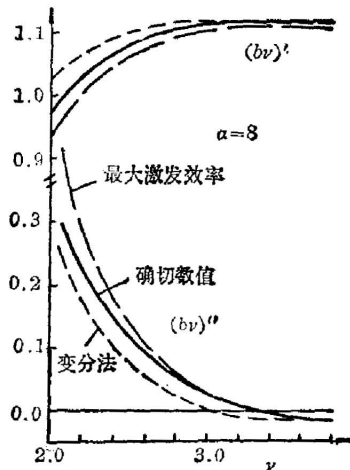
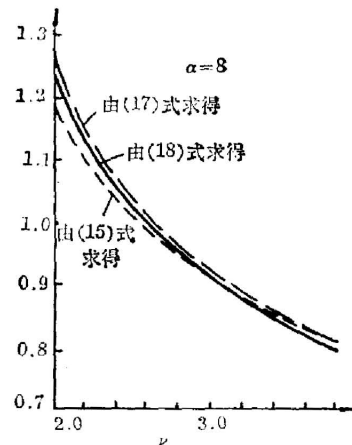
另一种最为常用且有实际意义的高斯近似的光斑是由最大发射效率确定的^[1,8], 即 x 能使下式

$$\int_0^\infty F(R) [2/\alpha x \sqrt{2\pi}] \exp(-R^2/x^2) R dR \quad (16)$$

取极大值,其中 $F(R)$ 是确切的场分布,(16)式对 x 求导数并使之为零,得到确定 x 的方程为

$$\int_0^\infty \left(\frac{2R^3}{x^2} - R \right) F(R) \exp(-R^2/x^2) dR = 0. \quad (17)$$

用数值方法从(4)、(5)式解出 $F(R)$ 和 b , 再从(17)式就可确定 x 。我们发现如此确定的 x , 在单模范围内,比变分法确定的相应的 x 要大些,图2中是 $\alpha=8$ 的例子。把这样解出的 x 和 b 代入(12)式算出的色散参数表明, $(b\nu)'$ 的误差也是很小的,而 $(b\nu)''$ 的误差仍是百分之几十,表1中也给出了例子。说明这种最大激发效率法也只能定性描述光纤的色散性质,如算出的阶跃光纤 $(b\nu)''$ 的零点是 2.95, 与准确的 3.01 是较一致的。但与变分法不同,在感兴趣的 ν 值范围内, $(b\nu)''$ 的值不是小于精确值,就是大于它,如图1中长虚线所表示的。可以设想,由这两种方法确定的光斑,一个偏大,一个偏小,“准确”值应在二者之间。

图1 $(bv)'$ 和 $(bv)''$ 随归一化频率 ν 的变化 ($\alpha=8$)Fig. 1 $(bv)'$ and $(bv)''$ versus normalized frequency ν for $\alpha=8$ 图2 归一化光斑 x 作为 ν 的函数 ($\alpha=8$)Fig. 2 Normalized spot size x as a function of ν for $\alpha=8$

四、色散参数的近似计算

单模光纤波导色散参数的近似计算, 根据 Sammut^[2] 对六种近似方法的分析表明, 在单模工作范围内, $(bv)''$ 的误差最大均可达 40%。在这些方法中, 除文献[1]的方法外, 都只能用于阶跃光纤。黄宏嘉等^[3] 最近报道的近似公式^[3]

$$\nu(bv)'' = 2 \frac{w^2}{\nu^2} \mathcal{K} \left[1 - 2\mathcal{K} + \left(\frac{2}{w} - \frac{2}{\mathcal{K}^{1/2}} + 2\mathcal{K}^{1/2} \right) \left(w + \frac{w^2 \mathcal{K}}{w} \right) \right]$$

其中 $\mathcal{K} = K_0^2(w)/K_1^2(w)$, 而 w 在 $1.5 < \nu < 2.5$ 范围内用 Rudolph-Newmann 近似

$$w = 1.1428\nu - 0.996 \quad (18)$$

计算, 精度虽有了提高, 但仍然是只限于阶跃光纤。从前节分析, 用高斯近似方法计算色散参数有一定精度, 但 $(bv)''$ 的计算误差较大。在我们关心的 ν 值范围内, 可能是用高斯场对包层中的场作近似不合适, 引起了 $\rho_{\text{总}}$ 的较大误差。所以不妨引入一种新的 x 的定义, 即用下式来确定 x

$$1 - \exp(-2/x^2) = \int_0^1 F^2(R)R dR / \int_0^\infty F^2(R)R dR, \quad (19)$$

也即用芯中功率流百分比等于实际的芯中功率流百分比的高斯型场来近似地表示实际场, 再用数值方法得到精确的 b 和 $F(R)$ 值, 把 $F(R)$ 代入(19)式, 就得到这种“功率比等效”方法确定的 x , 如图 2 所示, 它介于前节的两种方法确定的 x 之间。Marouse 曾对(17)式确定的 x 给出很好的近似公式^[4]

$$x = \frac{A}{\nu^{\alpha/(\alpha+2)}} + \frac{B}{\nu^{1.5}} + \frac{C}{\nu^5}, \quad (20)$$

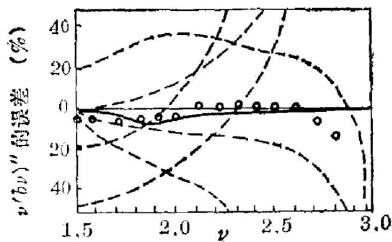
其中 A 、 B 、 C 是只依赖于 α 的常数。我们设(19)式确定的 x 也按这种形式变化, 则解出的 x 用最小二乘拟合, 得到新的系数 A 、 B 、 C , 代入(20)式并直接求导数, 就能简单地得到 x 和 x' ,

表 1 色散参数计算的相对误差(%)

Table 1 Relative error of the calculation of the dispersion parameters(%)

	$(b\nu)'$			$(b\nu)''$		
	2	8	∞	2	8	∞
α						
ν	3.0	2.7	2.3	3.0	2.7	2.3
(15)式的方法	3	1	1	-18	-41	-34
(17)式的方法	1	-1	-2.7	6	8	25
(19)式的方法	0.01	0.01	0.04	0.5	-1	0.3

再用(12)式计算色散参数,其结果与图1的精确值已不可分辨。相对误差列于表1,可见精度有了较大的改进。这样,可按以下方法近似计算色散参数:对阶跃光纤,由数值结果拟合出 $A=0.6184$, $B=1.6523$, $C=0.97$, 代入(19)式并求导数,得到 x 和 x' , 由(18)式得到 b , 把它们代入(12)式就得到色散参数。图3中标出以上方法计算 $\nu(b\nu)''$ 的相对误差^[9]。虚线为文献[2], 实数为文献[9], “O”为本文的结果,从图3可知,本文的方法在单模范围内和文献[9]的方法精度相近。 $\nu=3.0$ 附近误差变大是由于本身已接近于零。同样,文献[9]的方法的误差曲线在 $\nu=3.0$ 附近也应有一峰值才合理。

图3 阶跃光纤 $\nu(b\nu)''$ 计算的相对误差($\alpha=\infty$)Fig. 3 Relative error of $\nu(b\nu)''$ calculated for $\alpha=\infty$

对其它 α 值,从拟合出的系数 A 、 B 、 C 得到 $1 \leq \alpha \leq 50$ 的如下插值公式:

$$\left. \begin{aligned} A &= 1.6355 - 1.8728L + 1.4791L^2 - 0.60673L^3 + 0.10749L^4, \\ B &= 1.3263 - 0.50896L + 1.1392L^2 - 0.53535L^3 + 0.058458L^4, \\ C &= 25.768 - 84.709L + 131.83L^2 - 95.063L^3 + 24.611L^4, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中 $L = \log \alpha$ 。对某一 α 值,由上式算出系数,代入(20)式并求导数,得到 x 和 x' , 由文献[1]中(12)式可得 b , 代入本文(12)式就可得色散参数。 $\alpha > 50$ 的光纤其色散性质已近于阶跃光纤^[30]。Paek 等用数值方法算出 $\alpha=2$ 和 1 的单模光纤,在 $\lambda=1.33 \mu\text{m}$, $\Delta=0.2\%$ 时,总色散为零的最佳光纤半径分别为 5.705 和 $6.294 \mu\text{m}$ ^[11]。我们用上述方法,在同样条件下算出分别为 5.55 和 $6.15 \mu\text{m}$, 可见一致性是较好的。

五、结 束 语

本文把文献[3]的结果和高斯近似结合起来,提出计算单模 α 光纤波导色散参数的简单方法,用它考察了高斯近似对色散计算的影响。结果表明,用变分法确定光斑的方法常使波导色散的值在单模范围内偏小,而最大激发效率确定光斑的方法常使波导色散的值偏大,二者都只能定性地表示单模光纤的色散特征。在此基础上,提出了功率比等效的光斑定义,使计算精度有了较大的改进。得到的公式都是简单的解析式,它们也可用于计算芯与包层的功率流之比。

在本文完成后, 见到 Sansonetti 提出用光斑的光谱性质预测单模光纤色散的方法^[12], 它使用的是由最大发射效率确定光斑的高斯近似, 我们的结果说明了他的方法的误差, 并提出了改进的可能性。

本文得到林为干教授的鼓励, 武汉邮电科学研究院有关老师的支持, 特此致谢。

参 考 文 献

- [1] D. Marcuse; *J. O. S. A.*, 1978, **68**, No. 1 (Jan), 103.
- [2] R. A. Sammut; *Electron. Lett.*, 1979, **15**, No. 19 (Oct), 590.
- [3] D. Krumbholz *et al.*; *J. O. S. A.*, 1980, **70**, No. 2 (Feb), 179.
- [4] A. W. Snyder; *Proc. IEEE*, 1981, **69**, No. 1 (Jan), 6.
- [5] A. W. Snyder; *Electron. Lett.*, 1979, **15**, No. 10 (May), 269.
- [6] 大越孝敬; 《光学纤维基础》, (人民邮电出版社, 1980), 267.
- [7] C. T. Chang; *Appl. Opt.*, 1979, **18**, No. 14 (15 Jul), 2516.
- [8] D. Marcuse; *Bell Syst. Tech. J.*, 1977, **56**, No. 5 (May), 703.
- [9] Huang Hung Chia *et al.*; *Electron. Lett.*, 1981, **17**, No. 5, 202.
- [10] W. A. Gambling *et al.*; *Opt. & Quant. Electron.*, 1978, **10**, No. 1 (Jan), 31.
- [11] U. C. Paek *et al.*; *Bell Syst. Tech. J.*, 1981, **60**, No. 5 (May), 583.
- [12] P. Sansonetti; *Electron. Lett.*, 1982, **18**, No. 3 (Feb), 136.

Calculation of the dispersion parameters of single-mode optical fibers using Gaussian approximation

SHENG JIAMAQ

(Wuhan Institute of Post and Telecommunication)

(Received 5 October 1982; revised 8 April 1983)

Abstract

A new method of calculating waveguide dispersion parameters is presented by combining results of Ref [3] with the Gaussian approximation. The influence of two usual Gaussian approximation methods on the dispersion calculation uses this method. A new definition of the spot size is introduced, and simple analytic formulas for the dispersion parameters of single-mode α optical fibers are given in terms of this new definition. The results calculated from these formulas are in good agreement with the numerical results.