

# 光学元件列阵综合成像的附加像差

王 绍 民      周 国 生  
(杭州大学物理系)      (山西大学物理系)

## 提      要

在提出光学元件列阵综合成像原理<sup>[1~3]</sup>和演示了几种新的列阵型准相位共轭器<sup>[7~9]</sup>的基础上;本文导出了综合成像附加像差的一般表达式,综合像差为零的 $\alpha\beta\nu\delta$ 条件,讨论了衍射的影响,并作了实验验证。

## 一、问题的提出

为了分析光学元件列阵综合成像这一有趣而有用的现象,作为第一步,我们发展并运用矩阵光学的技巧,辅以衍射理论,得出了一阶成像性质。列阵的运转特性,可用下述光线变换矩阵和等效变换矩阵来描写<sup>[1~3]</sup>

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R+b-l)/R & b \\ (d\mp 1)/R & d \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c_1\rho_i + d_1}{a_1\rho_i + b_1} & 1 \end{pmatrix}。 \quad (1)$$

这里,  $R$  是列阵输入面的曲率半径,  $l$  是列阵各单元的轴向厚度,  $abcd$  是组成列阵各单元的光线变换矩阵元,“ $\mp$ ”分别适用于向前(例如折射)或向后(例如反射)传播的系统,  $\rho_i$  则代表入射光束的波前曲率半径。如果选择

$$b=0, \quad d=-1 \quad (2)$$

的光学元件组成平面型( $R=\infty$ )的列阵,则其变换矩阵式(1)退化为

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/\rho_i & 1 \end{pmatrix}。 \quad (3)$$

它和由简并四波混频产生的相位共轭镜<sup>[4~6]</sup>具有相同的形式。

第二步,根据式(2),我们演示了几种新的列阵型准相位共轭器<sup>[7~9]</sup>。角反射器<sup>[10]</sup>,或经参考面移动后的梯度光纤<sup>[7]</sup>,玻璃微珠<sup>[8]</sup>和特厚透镜<sup>[9]</sup>,其光线变换矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -n_0\sqrt{2\beta_0} \sin(l\sqrt{2\beta_0}) & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2(2-n)}{nR} & -1 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\left[\frac{2(n-1)}{R} - \frac{(n-1)^2 l}{nR^2}\right] & -1 \end{pmatrix}。 \quad (4)$$

它们都满足式(2),但矩阵元  $c$  不同。

作为准相位共轭器的列阵和能产生相位共轭波的非线性元件,从本质到现象都是完全不同的。列阵除了作为准相位共轭器外,还有许多其它新的光学现象可能应用。因此,进一步研究列阵单元光线变换矩阵元和列阵单元径向尺寸对综合像质的影响,是必要的。

## 二、综合像差的一般表述

所谓综合像差,是指由单元尺寸所引起的列阵综合成像在综合像面处的附加像差。它仍是傍轴近似下的一阶现象,这和普通像差的概念完全不同。

列阵各单元的排列可看作规律性的失调。在顾及单元尺寸后文献[1]中的失调规律性应改写为

$$\begin{cases} \varepsilon_i = \gamma_1 + u\gamma'_{i10} = \gamma_1 + u(\gamma'_{i1} \mp \sigma_i/u), & (5) \\ \varepsilon'_i = -\varepsilon_i/R; & (6) \end{cases}$$

并有

$$\sigma_i = \sigma \sqrt{1 - \varepsilon_i'^2}, \quad (7)$$

这里,  $\sigma$  是单元的半径,  $\varepsilon_i$ 、 $\varepsilon'_i$  表示单元  $i$  的失调参量。 $u$ 、 $v$  和  $V$  分别代表物距(从参考面量起,不是从主面量起,下同)\*、单元像距和综合像距。 $\gamma_1$  是物高,  $\gamma'_{i10}$  和  $\gamma'_{i1}$  则分别表示物到单元  $i$  的中心和物到单元  $i$  的边缘的光线相对于光轴的倾角,见图1。

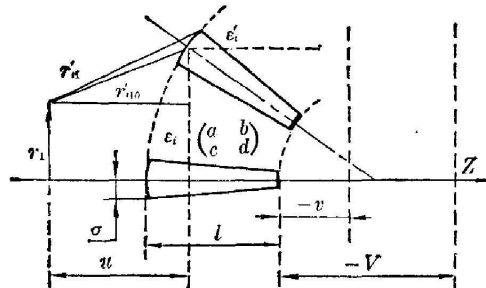


图1 光学元件列阵的综合成像

Fig. 1 Synthetical image of optical element arrays

光线通过单元  $i$  在综合像面处的几何参量可由下式计算

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \gamma'_{i20}, \gamma'_{i2} \\ \gamma'_{i20}, \gamma'_{i2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B & E\varepsilon_i F\varepsilon'_i \\ C & D & G\varepsilon_i H\varepsilon'_i \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma'_{i10}, \gamma'_{i1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -V & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & \alpha\varepsilon_i\beta\varepsilon'_i \\ c & d & \gamma\varepsilon_i\delta\varepsilon'_i \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma'_{i10}, \gamma'_{i1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\* 参考面选在傍轴近似下的列阵前端面和后端面,符号定义类同于高斯光束变换。

$$= \begin{pmatrix} a-cV & (au+b)-V(cu+d) & (\alpha-\nu V)\varepsilon_i & (\beta-\delta V)\varepsilon'_i \\ c & cu+d & \nu\varepsilon_i & \delta\varepsilon'_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma'_{i10}, \gamma'_{i1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

式中,  $\alpha=1-a, \beta=1-b, \nu=-c, \delta=\pm 1-d$  (9)

为失调矩阵元。“ $\pm$ ”分别用于向前或向后传播的系统。将失调规律性(5)、(6)代入(8)式,得

$$\begin{aligned} \gamma_{i20} &= \{(\alpha-cV) + [(\alpha-\nu V) - (\beta-\delta V)/R]\} \gamma_1 \\ &\quad + \{[(au+b) - V(cu+d)] + u[(\alpha-\nu V) - (\beta-\delta V)/R]\} \gamma'_{i10} \\ &= \underline{A}\gamma_1 + \underline{B}\gamma'_{i10} \end{aligned} \quad (10)$$

和  $\gamma_{i2} = \underline{A}\gamma_1 + \underline{B}\gamma'_{i10} \pm \sigma_i [(au+b) - V(cu+d)]/u_0$  (11)

比较(10)式和(11)式,可得综合成像的附加像差

$$\underline{\Delta}\gamma_{i2} = \gamma_{i20} - \gamma_{i2} = \mp \sigma_i [(au+b) - V(cu+d)]/u_0 \quad (12)$$

由列阵的光线变换矩阵式(1)和几何成像的  $ABCD$  定律

$$V = \frac{\left(\frac{R+b-l}{R}\right)u+b}{\left(\frac{d\mp 1}{R}\right)u+d}, \quad (13)$$

(12)式可以写成完整的形式

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}\gamma_{i2} &= \mp \sigma \sqrt{1-\varepsilon_i'^2} \left\{ (au+b) \right. \\ &\quad \left. - \left[ \left(\frac{R+b-l}{R}\right)u+b \right] (cu+d) / \left[ \left(\frac{d\mp 1}{R}\right)u+d \right] \right\} / u_0. \end{aligned} \quad (14)$$

这就是列阵综合成像附加像差的一般表述。

平面型列阵( $R=\infty$ ), 综合像差式(14)退化为

$$\underline{\Delta}\gamma_2 = \mp \sigma [(1-d) - cu]/d, \quad (15)$$

由平面型列阵组成的准相位共轭器, 即将式(2)代入(15)式, 综合像差则可进一步简化

$$\underline{\Delta}\gamma_2 = \mp \sigma (cu-2). \quad (16)$$

联系(16)式和矩阵式(4), 很清楚, 组成列阵的单元其矩阵元  $c \neq 0$ , 在某些情况下综合像差小于  $c=0$  的单元所组成的列阵; 即  $c \neq 0$  的单元所组成的列阵, 有可能获得较高的综合成像质量或较完美的准相位共轭性质。

### 三、综合像差为零的条件

若仅将(6)式代入(8)式, 则得

$$\begin{aligned} \gamma_{i2} &= (\alpha-cV)\gamma_1 + [(au+b) - V(cu+d)]\gamma'_{i1} + [(\alpha-\nu V) - (\beta-\delta V)/R]\varepsilon_i \\ &= A\gamma_1 + B\gamma'_{i1} + E_0\varepsilon_i, \end{aligned} \quad (17)$$

如果  $E_0=0$ , 则意味着综合像面与单元像面重合, 综合像差为零。得

$$V = \frac{\alpha R - \beta}{\nu R - \delta}. \quad (18)$$

条件(18)可称为综合像差为零的  $\alpha\beta\nu\delta$  条件。

例如,我们可以找到一种列阵,其表面曲率若选为

$$R = \beta/\alpha = \delta/\nu, \quad (19)$$

则对任意的  $u$ , 其综合像差均为零。

对平面型列阵 ( $R = \infty$ ), 按(18)式, 可得

$$V = \alpha/\nu = -H_2 = V, \quad u = -\delta/\nu = H_1. \quad (20)$$

即, 若将物放在单元主平面上时, 其综合像差为零。该结论也可从(15)式和(16)式得出。

#### 四、列阵衍射的影响

到目前为止, 忽略了光学元件有限尺寸所引起的衍射效应。究竟衍射效应能否被忽略, 这取决于菲涅尔数  $N$  ( $N \gg 1$ , 几何光学;  $N \simeq 1$ , 菲涅尔衍射;  $N \ll 1$ , 夫朗和弗衍射)。如果以曲率为  $1/\rho$  的球面波入射到半径为  $\sigma$  的圆孔上, 其后又跟随着一系列光学元件, 则菲涅尔数可写成矩阵元的形式<sup>[11]</sup>

$$N = \frac{\sigma^2}{\lambda} \left( \frac{a_0}{b_0} + \frac{1}{\rho} \right), \quad (21)$$

式中,  $\lambda$  是波长,  $a_0$ 、 $b_0$  是孔后系统的变换矩阵元。

由(21)式可知, 如果一个成像系统位于孔后, 不管孔多小其衍射效应均可忽略。在列阵成像的应用中, 我们应尽量采取这样的结构。

如果  $b_0 \neq 0$ , 则衍射对综合像质的影响, 可用失调光学系统的衍射积分公式<sup>[12]</sup>或方法<sup>[8]</sup>去分析。

#### 五、实验验证举例

本文所得的结果, 已获得大量的实验验证, 并已取得实际应用。其中最简单、最直观的是

作为准相位共轭器的演出, 见图 2。点光源为半径 0.2 的小孔被白炽灯均匀地照明。

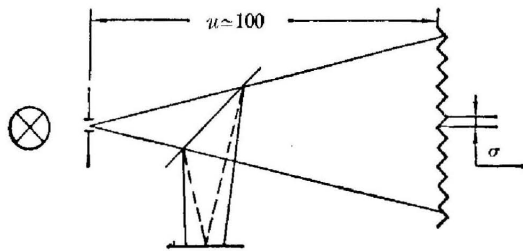


图 2 光学元件列阵作为准相位共轭器

Fig. 2 Pseudo-conjugators of arrays

如果选用  $\sigma_1 = 1.2$  的六角形直角反射棱镜的列阵作为反射器, 菲涅尔数  $N \simeq 3 \times 10^1$ , 属于几何光学问题, 综合成像如图 3(a) 所示。其尺寸完全符合公式(16) (测量误差小于  $\pm 10\%$ )。由于  $c = 0$ , 尺寸和  $u$  无关。

如果选用  $\sigma_2 = 0.04$  的玻璃微珠列阵作为反射器, 菲涅尔数  $N \simeq 3 \times 10^{-2}$ , 属于夫朗和弗衍射, 光场分布如图 3(b) 所示。其尺寸和  $u$  有关。当  $N \simeq 1$  时, 尺寸最小。

#### 六、结 束 语

1. 除普通像差外, 列阵的综合像存在着明显的附加像差。

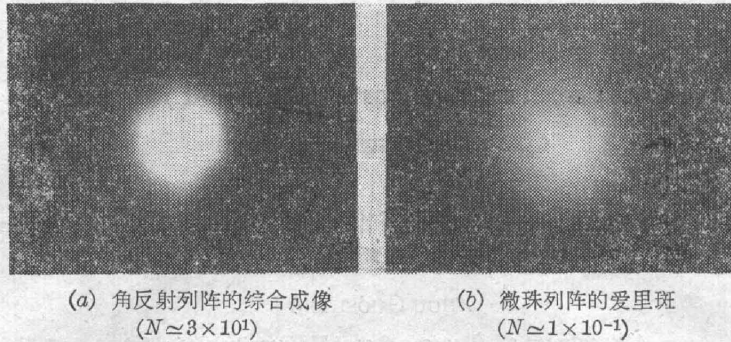


图 3 列阵综合成像的质量

Fig. 3 Synthetical imaging quality of array

- (a) Synthetical imaging aberration for corner-cube array ( $N \approx 3 \times 10^1$ );  
 (b) Airy pattern for bead array ( $N \approx 1 \times 10^{-1}$ )

2. 附加的综合成像像差是由组成列阵的各光学单元的径向尺寸引起的。它和列阵的结构、单元的光线变换矩阵,特别是矩阵元  $c$  有关,也和物距有关。

3. 若能满足  $\alpha\beta\nu\delta$  条件,则附加的综合像差为零。对平面型列阵,即物应放在单元的主面上。

4. 当菲涅尔数不满足  $N \gg 1$ ,将存在着衍射效应。如列阵至观察面是成像系统,则衍射效应可忽略。

作者感谢西德的 H. Weber 教授、中国科学院上海光学精密机械研究所的邓锡铭教授和上海交通大学的陈英礼副教授对上述问题的有益讨论,以及应成仁等同志在验证实验中所给予的协助。

## 参 考 文 献

- [1] 王绍民;《杭州大学学报》,(自然科学版),1983,10, No. 4 (Oct), 476.  
 [2] Wang Shaomin (王绍民); *Matrix Methods in Treating Decentered Optical Systems, to be published.*  
 [3] 周国生,王绍民;《物理学报》,1984,33, No. 3 (Mar).  
 [4] Au Yeung, J. D. Fekete, D. M. Peper and A. Yavir; *IEEE*, 1979, QE-15, No. 10 (Oct), 1180.  
 [5] 王绍民,洪熙春,于军;《光学学报》,1983,3, No. 1 (Jan), 41.  
 [6] Wang Shaomin (王绍民), and H. Weber; *Opt. Comm.*, 1982, 41, No. 5 (May), 360.  
 [7] 王绍民,周国生等;《物理学报》,1983,32, No. 10 (Oct), 1357.  
 [8] 黄维实,蒋秀明等;《中国激光》,1983,10, No. 3 (Mar), 191.  
 [9] 王绍民,朱精敏等;《应用激光》,1983,3, No. 5 (Oct), 27.  
 [10] S. F. Jacobs; *Opt. Eng.*, 1982, 21, No. 2 (Mar/Apr), 281.  
 [11] 范滇元;《光学学报》,1983,3, No. 4 (Apr), 319.  
 [12] 洪熙春,黄维刚,王绍民;《物理学报》,1982,31, No. 12 (Dec) 1655.

## Additional aberrations for synthetical imaging of optical element arrays

WANG SHAOMIN

*(Department of Physics, Hangzhou University, Hangzhou)*

ZHOU GUOSHENG

*(Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan)*

(Received 20 February 1984; revised 25 June 1984)

### Abstract

Based on synthetical imaging principle of optical element arrays<sup>[1~3]</sup> and demonstrations of some new types of arrays as pseudo-conjugators<sup>[7~9]</sup>, a general expression of synthetical image aberrations have been derived in this paper. Then, an  $\alpha\beta\nu\delta$  condition for synthetical aberrations eliminated has been given and diffraction affect has been discussed. The results have been proved by experiments.