第4卷 第12期
1984年12月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 4, No. 12
December, 1984

失调平面腔的解析线——多尺度微扰论在谐振腔理论中的应用

方洪烈　王小异*
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提　　要

本文用多尺度微扰技术解出了失调平面腔积分方程的等价微分方程，第一次获得了完整的解析解。

一、引　　言

平行平面谐振腔(简称平面腔)只是一个理想模型，实际的平面腔总是失调的，因此对失调平面腔的分析是有意义的。已有的几篇失调平面腔模式的文章都是采用数值分析[1~3]，另一些解析方法也只能求得某些个别的参量[4~7]。由于解决此问题极为困难，一个完整的解析解至今未见报道。但这一问题看来可用多尺度微扰方法予以解决。

多尺度微扰论(multiple scaling perturbation)[8]，首先在非线性等离子体物理中获得应用[9]，近年来又运用于自由电子激光理论[10]。本文将用此方法来解决光学谐振腔的一些理论问题。

二、失调平面腔的解

失调平面腔的积分方程为[11]：(所用符号与[11]相同)

$$b_m u_m(x)=\sqrt{\frac{i}{\lambda L}}\int_{-a}^{a}\exp\left\{-\frac{iR}{2L}\left[(x'-x)^2-2\beta L(x'+x)\right]\right\}u_m(x')dx', \tag{1}$$

严格求解这一方程是十分困难的，因此我们只来求它的准几何近似解。在准几何近似条件下，积分方程(1)可化成等价微分方程[11]：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_m(x)+\omega^2(x)u_m(x)=0, \tag{2}$$

其中：

$$\omega^2(x)=-H_m-\frac{4k^2\beta}{L}x+k^2\beta^2, \tag{3}$$

β 是平面镜夹角的一半，一般是非常小的。因此，$\omega^2\sim H_m$，对于基模它是1的量级，ω^2 随模次数的增高将以 m^2 的比率增大。而 $\dot{\omega}=-\frac{4k^2\beta}{L}$，显然，对于很小的 β，总能满足：

收稿日期：1984年4月17日；收到修改稿日期：1984年6月7日

* 南京工学院学生。

$$|\dot{\omega}|\ll\omega^2,$$

因而根据多尺度微扰论[10]，有方程(1)的解为：

$$u_m(x)=A_0\frac{1}{\sqrt{\omega(x)}}\exp\left\{i\int_0^x\omega(x')dx'\right\}+B_0\frac{1}{\sqrt{\omega(x)}}\exp\left\{i\int_0^x\omega(x')dx'\right\}。\tag{4}$$

由于非失调腔的解是已知的[11]，故令 $\beta=0$ 即可确定常数：

$$-H_m=M^2=\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2\left(1-\frac{1-i}{\pi\sqrt{2N}}\right)^2,\tag{5}$$

$$A_0=\pm B_0=\sqrt{\frac{M}{4a}}。\tag{6}$$

将(5)、(6)式代入(4)式，可求得失调腔的解为：

$$\begin{aligned}u_m(x)&=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(1+\frac{k^2\beta}{M^2L}x\right)\cos\left(Mx-\frac{k^2\beta}{ML}x^2\right),\ m=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\\ u_m(x)&=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(1+\frac{k^2\beta}{M^2L}x\right)\sin\left(Mx-\frac{k^2\beta}{ML}x^2\right),\ m=2,\ 4,\ 6,\ \cdots。\end{aligned}\tag{7}$$

将本征函数式(7)代入方程(1)便可求得本征值：

$$b_m=\left(1-\frac{k^2\beta^2}{M^2}\right)\exp\left\{i\left(\frac{M^2L}{2R}-kL\beta^2\right)\right\},\tag{8}$$

本征值(8)式给出的单程衍射损失 L_m 为：

$$\begin{aligned}L_m&=1-|b_m|^2\doteq1-\left|1-\frac{k^2\beta^2}{M^2}\right|^2\exp\left(-\frac{m^2}{8N}\sqrt{\frac{2}{N}}\right)\\&\doteq\frac{m^2}{4\sqrt{2N^3}}+\left(\frac{16N}{M^2\pi}\right)kL\beta^2,\end{aligned}\tag{9}$$

共振频谱为：

$$\frac{2L}{\lambda}\simeq q\ (1-\beta^2)\ -\left(\frac{m}{4}\right)^2\frac{1}{N},\tag{10}$$

其中 $N=\dfrac{a^2}{\lambda L}$ 是费涅耳数，q 为整数。

本征模的角分布 $Q(\omega)$ 为：

$$\begin{aligned}Q(\omega)&=\int_{-a}^{a}\exp(-i\omega x)u_m(x)dx\\&=\begin{cases}\pm\dfrac{2\alpha_m}{\alpha_m^2-\omega^2}[\cos\omega-i(p+q)\beta\sin\omega]_{m=3,7,\cdots}^{m=1,5,\cdots},\\[2ex]\mp\dfrac{2\alpha_m}{\alpha_m^2-\omega^2}[\sin\omega-i(p+q)\beta\cos\omega]_{m=4,8,\cdots}^{m=2,6,\cdots},\end{cases}\end{aligned}\tag{11}$$

式中，

$$\omega=aR(Q-\beta),\quad \alpha_m=\frac{m\pi}{2},$$

$$p=\frac{k^2a^8}{\alpha_m^2L},\quad q=\frac{k^2a^3}{\alpha_mL}。$$

三、物理含义

场分布(7)式与失调角度β有关。由于β不为零，场的极大值离开了原来的位置，偏向一边。β值可正可负，场可偏左也可偏右，这是容易理解的。

本征值(8)式只与β^2有关，而与β无直接关系。这也是自然的，因为不管β为正或负，只要$|\beta|$相同，腔的损失和共振频谱不应有变化。这是合理的。

下面我们要指出的是，我们求得的衍射损失(9)式与 Любимов 等人求得的结果[6~7]不同，他们的结果是：

$$L_m = \frac{m^2}{\sqrt{2N^3}} + \frac{1}{3} RL\beta^2, \tag{12}$$

比较这两个结果我们可以看到，本文的结果比他们的要精确得多。例如，当$N=0$时，即反射镜变成一个几何点时，不存在“失调”的概念，由失调而引起的损失应为零。但(12)式却表明它仍然具有$\frac{1}{3}RL\beta^2$大小的失调损失，这显然是不合理的。而(9)式则告诉我们，此时失调损失等于零，可见(9)式比(12)式精确得多。

此外，(9)式还表明：由腔的失调所引起的损失与共振模次数m的平方成反比。实际上由图可以看出，对于基模(实线，此时$m=1$)来说，场分布的峰点很靠近镜面的边缘，承受了很大的损失；而对于一次模(虚线，$m=2$)，场分布的两个峰点中只有一个峰点比较接近镜面的边缘，承受损失较大，但总的损失是较小的。因此高次模的失调损失较小是当然的。

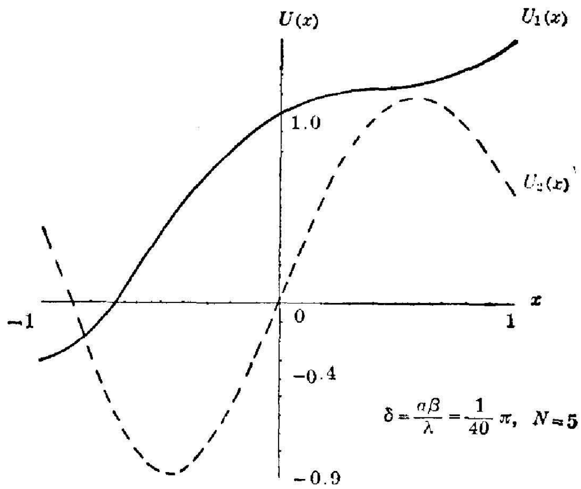

图 失调腔基模及一次模场分布图
Fig. Profile of fundamental and first order mode field of misaligned resonators

参考文献

[1] A. G. Fox, T. Li; *Proc. IEEE*, 1963, **51**, No. 1 (Jan), 80.
[2] R. L. Sanderson, W. Steifer; *Appl. Opt.*, 1969, **8**, No. 11 (Nov), 2241.
[3] W. H. Wells; *IEEE J. Quantum Electron.*, 1966, **QE-2**, No. 5 (May), 94.
[4] Ю. А. Ананьев, *и др.*; *ЖТФ*, 1969, **39**, Вып. 10.
[5] В. В. Любимов; *Опт. и спектр.*, 1966, **21**, Вып. 2 (Авг), 224.
[6] В. В. Любимов, И. Б. Орлова; *ЖТФ*, 1969, **39**, Вып. 12 (Дек), 2183.
[7] В. В. Любимов; *Опт. и спектр.*, 1971, **30**, Вып. 4 (Апр), 758.
[8] J. Cole; *«Perturbation Methods in Apllied Mathematics»*, (Blaisdell, Waltham, 1968).
[9] R. Davidson; *«Methods in Nonlinear Plasma Theory»*, (Academic, New York, 1972).
[10] G. T. Moore, M. O. Scully; *Phys. Rev. A*, 1980, **21**, No. 6 (Jun), 2000.
[11] 方洪烈;《光学谐振腔理论》, (科学出版社, 北京, 1981); 346; 78.

Analytic solutions to the misaligned flat mirror resonators—Applications of the multiple-scaling perturbation theory to optics resonators

FANG HONGLIE AND WANG XIAOYI*

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 17 April 1984; revised 7 June 1984)

Abstract

In this paper the equivalent differential equation to the integral equation of misaligned flat mirror resonators is solved by using of the multiple-scaling perturbation theory. A complete analytic solutions to the equation is obtained for the first time.

* A graduate from Nanjing Institute of Technology in the class 1984.