

一步彩虹全息 L-S-L 成像系统

厉志明 任鸿耀 刘淑辉
(浙江大学物理系)

提 要

我们从理论上推导了一步彩虹全息 L-S-L 系统的物点全息像的分辨率和色模糊的普遍公式, 定量地讨论了在某些实验条件下的系统的全息像特性, 并举例说明了根据不同要求的像性质选择一组系统参量的方法。

一、引 言

一九六九年 Benton^[1] 制作出第一张彩虹全息图。记录过程分二步完成。一九七八年 Chen 和 Yu^[2] 提出了一步彩虹的成像系统。近年来, 在一步彩虹的记录和再现中引进了各种不同技术, 但总的看来, 还缺乏对彩虹像特性进行分析的普遍理论。我们建议的一步彩虹全息 L-S-L, 即透镜-缝-透镜成像系统如图 1 所示。其主要特点是有五个可调节参量: r, D, C, S, W 。通过这些参量的调节, 可以控制不同位置的物像和缝像, 以保证系统的正、负全息像都能有较高的分辨率和较低的色模糊度。我们从理论上推导了有关系统全息像特性的普遍公式, 因而可以对各种具体情况进行理论计算和分析。

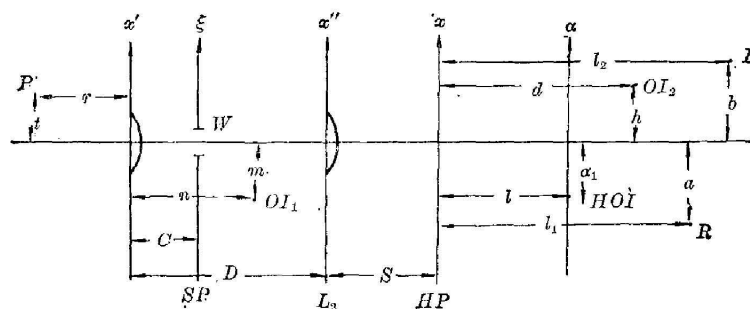


图 1 一步彩虹全息 L-S-L 成像系统

Fig. 1 L-S-L imaging system of one-step rainbow holography

二、像 分 辨 率

因为彩虹像的分辨率主要决定于狭缝的衍射效应, 所以采取缝宽方向的一维分析就足以说明问题了。由于透镜和全息图的孔径远大于缝的宽度, 所以在计算衍射效应时可以把它们看作是无差别的。为了避免数学上的过于繁复, 我们将透镜 L_1 和 L_2 看作为无像差的

理想薄透镜, 并只讨论二透镜焦距相等的情况。最后, 我们约定全部计算过程采用二次近似理论, 并一般不写出复常数振幅项。

现在来计算物点 P 的全息像的衍射场分布。由 P 点发出的光经透镜 L_1 , 狭缝 SP 和透镜 L_2 到达全息干板 HP 上, 和点光源 R 发出的参考光在 HP 平面上相遇产生干涉, 构成全息图。处理后的全息图由点光源 I 照明下再现, 产生了物点 P 的全息像, 其中心位置为 HOI 。因为 OI_1 为物点 P 的像的中心, 所以在 ξ 上的光场可以写成

$$u_{SP}(\xi, k_1) = \exp\{-ik_1(\xi+m)^2/2(n-C)\}, \quad (1)$$

式中 $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$; λ_1 为物点发出光的波长; ξ 为缝宽方向坐标。因而物点 P 发出的光在全息干板 HP 上的光场为

$$u_0(x, k_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{W}{2}}^{+\frac{W}{2}} u_{SP}(\xi, k_1) \cdot \exp\{ik_1(\xi-x'')^2/2(D-C)\} d\xi \right] \cdot \exp\{-ik_1x''^2/2f\} \cdot \exp\{ik_1(x''-x)^2/2S\} dx'', \quad (2)$$

式中 W 为缝宽; x 和 x'' 各为全息干板 HP 和透镜 L_2 的坐标; f 为透镜焦距。设参考光为向 R 的会聚波, 则参考光在全息干板上的光场为

$$u_R(x, k_1) = \exp\{-ik_1(x+a)^2/2l_1\}. \quad (3)$$

经处理后的全息图满足线性关系并由点光源 I 进行再现。我们感兴趣的是再现项 $u_R u_0^*$, 那么物点 P 的全息像的衍射场分布为

$$E_r(\alpha, k) = K \int_{-\frac{W}{2}}^{+\frac{W}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{ik_1(\xi+m)^2/2(n-C)\} \cdot \exp\{-ik_1(\xi-x'')^2/2(D-C)\} \cdot \exp\{ik_1x''^2/2f\} \cdot \exp\{-ik_1(x''-x)^2/2S\} \cdot \exp\{-ik_1(x+a)^2/2l_1\} \cdot \exp\{ik(x-b)^2/2l_2\} \cdot \exp\{-ik(x-\alpha)^2/2l\} dx'' dx d\xi, \quad (4)$$

若讨论的是虚像, I 为发散波; 若讨论的是正像, I 为会聚波, 式(4)中 l_2 的指数项应加上负号。式中 K 为比例常数, l 为物点 P 的全息像和全息图之间的距离, 它的值等于无狭缝时二者之间的距离, 可由下面等式

$$K \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{ik_1(x'+m)^2/2n\} \cdot \exp\{-ik_1(x''-x')^2/2D\} \cdot \exp\{ik_1x''^2/2f\} \cdot \exp\{-ik_1(x-x'')^2/2S\} \cdot \exp\{-ik_1(x+a)^2/2l_1\} \cdot \exp\{ik(x-b)^2/2l_2\} dx' dx'' = \exp\{-ik(x+\alpha_1)^2/2l\} \quad (5)$$

解得

$$l = \lambda_1 l_1 l_2 d / (\lambda_1 l_2 + \lambda_1 l_1 d - \lambda l_2 d). \quad (6)$$

将图 1 的成像几何关系: $(D-n)^{-1} + (S+d)^{-1} = f^{-1}$ 和 $(S+d)/(D-n) = -h/m$ 及(6)式代入(4)式, 得到

$$E_r(\alpha, k) = K \sin C [\pi BW (\alpha - \alpha_1) / \lambda], \quad (7)$$

其中

$$B = fd[(D-C)(S+d-f) - f(S+d)]^{-1} l^{-1} \quad (8)$$

和

$$\alpha_1 = l[(\lambda/\lambda_1)(a/l_1) + (b/l_2) - (\lambda/\lambda_1)(h/d)], \quad (9)$$

最后, 我们得到 L-S-L 系统的最小分辨距离

$$\Delta H_r = -(\lambda/W) [\lambda_1 l_1 l_2 / (\lambda_1 l_2 + \lambda_1 l_1 d - \lambda_2 d)] [(D-C)(S+d-f)/f - (S+d)]. \quad (10)$$

利用成像的几何关系将 d 也用系统参量表出,

$$d = f [D(r-f) - rf] [(D-f)(r-f) - rf]^{-1} - S. \quad (11)$$

下面讨论几种特殊情况:

(i) 令 $D=C$ 为任选常数, 即缝和第二透镜重合, 由式(10)得

$$\Delta H_r]_{D=C} = \lambda \lambda_1 l_1 l_2 (d+S) [\lambda_1 l_2 + \lambda_1 l_1 d - \lambda_2 d]^{-1} W^{-1}, \quad (12)$$

若再令 $d=0$, 即全息干板和物点 P 的像 OI_2 重合, 则有

$$\Delta H_r]_{d=0} = \lambda_1 S W^{-1}. \quad (13)$$

若另令 $l_1=l_2 \rightarrow \infty$, 即参考光和再现光都是平面波, 则有

$$\Delta H_r]_{l_1=l_2 \rightarrow \infty} = \lambda_1 (S+d) W^{-1}, \quad (14)$$

式(12), (13)和(14)就是 Zhuang^[3] 等对一步彩虹膜像光路在缝和成像透镜重合情况下进行计算所得的结果。我们建议的 L-S-L 光路虽然比膜像光路还多了透镜 L_1 , 但分辨率的下降主要由缝引起, 所以两者结果一致是容易理解的。

(ii) 令 $D=f$, 即二透镜之间的距离等于透镜的焦距。为了能与膜像光路的分辨率作出定量比较, 我们来讨论参考光和再现光都是平面波情况, 即 $l_1=l_2 \rightarrow \infty$ 或 $l_1, l_2 \gg d$ 。膜像光路在缝和透镜重合时的最小分辨距离为

$$\Delta H_r]_{f}^{(\infty)} = (\lambda_1/W) (d+S) = (\lambda_1/W) [rf/(r-f)] \quad (r > f). \quad (15)$$

L-S-L 光路在 $D=f$ 时最小分辨距离由式(10)和(11)得到

$$\Delta H_r]_{D=f}^{(\infty)} = (\lambda_1/W) [f - C(r-f)/r] \quad (r > 0, 0 \leq C \leq f). \quad (16)$$

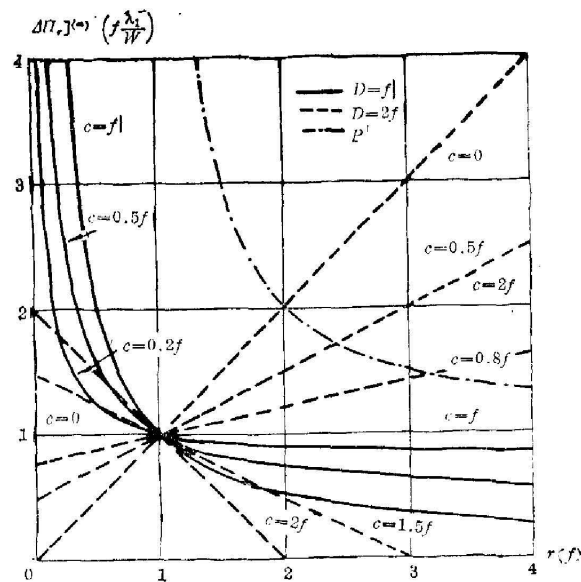


图2 $\Delta H_r \sim r$ 曲线
Fig. 2 $\Delta H_r \sim r$ curve

式(15)和(16)对 r 的关系由图 2 所示。其中 ΔH_r 以 $f(\lambda_1/W)$ 为单位, r 以 f 为单位。 $\Delta H_r]_{f}^{(\infty)}$ 只有在 r 较大时才有较小的值, 但总是大于 $f(\lambda_1/W)$ 。而 $\Delta H_r]_{D=f}^{(\infty)}$ 在 $r > f$ 时其值已小于 $f(\lambda_1/W)$; 当 $C=0$ 时, 分辨和物点的位置无关, 其值为 $f(\lambda_1/W)$ 。Yu 等^[4] 为提高全息像分辨率而引进的柱面透镜技术, 其光路相当于此处的 $D=f, C=0$ 情况。由以上分析可知, 这一技术的分辨率达到了上述膜像光路分辨率的最大值。下面举一具体例子。设 $f = 15 \text{ cm}$, $\lambda_1 = 6328 \text{ \AA}$, $W = 2 \text{ mm}$, 则 $f(\lambda_1/W) = 0.048 \text{ mm}$, 如欲得到 $\Delta H_r \leq 1.20 f(\lambda_1/W) = 0.058 \text{ mm}$ 或大于 17 条/mm 的较高分辨率。若采用膜像光路, 则 $r \geq 6f = 90 \text{ cm}$, 而 L-S-L 光路的 $r \geq 0.6f = 9 \text{ cm}$ 。单从接收

能量的观点说, 前者也是非常不利的。若要求更高的分辨率, 因 $\Delta H_r]_{f}^{(\infty)} \geq 1$, 所以膜像光路是无法满足的, 而 L-S-L 光路则不难实现。可见 L-S-L 系统对提高全息像的分辨率具有

很大的优越性。

(iii) 令 $D=2f$, 由式(10)和(11)得

$$\Delta H_r]_{rD=2f}^{(\infty)} = (\lambda_1/W) [r - C(r-f)/f] \quad (r > 0, 0 \leq C \leq 2f)。 \quad (17)$$

式(17)由图 2 中的一族虚线表出。L-S-L 光路在 $D \leq f$ 时只能用于拍摄虚像, 因为缝像总在 L_2 的右侧; 在 $D > f$ 时可用于拍摄正像, 此时缝可在 L_2 的右侧。由图看出, L-S-L 光路的正像也可达较高的分辨率。

(iv) $S=d=C=0$, 即透镜 L_2 , 全息干板和物像三者共面。这就是 Tamura^[5] 为消除正像光路的渐晕现象而引进的场透镜技术。由(10)式得

$$\Delta H_r]_{\substack{C=0 \\ d=S=0}}^{(\infty)} = (\lambda_1/W) [rf/(r-f)] \quad (r > f), \quad (18)$$

结果和(15)式完全相同。就是说 Tamura 的场透镜技术使正像光路的分辨率达到了虚像光路的水平。

三、色 模 糊

Benton 型彩虹全息的色模糊相继由 Wyant^[6]和 Chen^[7]等研究过。一步彩虹的虚像光路在缝和透镜重合时的色模糊由 Zhuang 等^[8]作过计算。我们现在来研究 L-S-L 光路的色模糊问题。

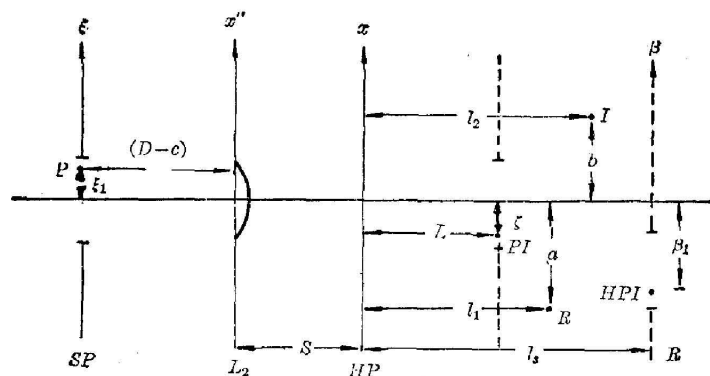


图 3 计算波长扩展 $\Delta\lambda$ 用图

Fig. 3 Scheme for calculating wavelength spread

参看图 3, 狭缝孔径上任一点 P 的全息像 HPI 的位置 (l_s, β_1) , 可由下面的等式得出

$$K \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-ik_1(x'' - \xi_1)^2/2(D-C)\} \cdot \exp\{ik_1x''^2/2f\} \cdot \exp\{-ik_1(x-x'')^2/2S\} \\ \cdot \exp\{-ik_1(x+a)^2/2l_1\} \cdot \exp\{ik(x-b)^2/2l_2\} dx'' = \exp\{-ik(x+\beta_1)^2/2l_s\}。 \quad (19)$$

核对 x^2 和 x 项的系数并利用成像几何关系: $(D-C)^{-1} + (L+S)^{-1} = f^{-1}$ 得

$$l_s = -\lambda_1 l_1 l_2 L [\lambda_1 l_2 + \lambda_1 l_1 L - \lambda_2 L]^{-1} \quad (20)$$

和

$$\beta_1 = -l_s [(\lambda/\lambda_1)(S+L)(D-C)^{-1}L^{-1}\xi_1 - (\lambda/\lambda_1)(a/l_1) - (b/l_2)]。 \quad (21)$$

缝的全息像的宽度

$$W' = -\frac{d\beta_1}{d\xi_1} W = W(\lambda/\lambda_1) \cdot [(S+L)/(D-C)] (l_s/L)。 \quad (22)$$

令(21)式中的 $\xi_1=0$ 并对 λ 求微分, 就得到单位波长增量引起的缝全息像的中心位置的偏离为

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \lambda} = -l_s (bl_1 - bL - aL) (\lambda l_2 + \lambda_1 l_1 L - \lambda_2 L)^{-1}. \quad (23)$$

所以波长扩展

$$\begin{aligned} \Delta \lambda = W' \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \lambda} \right)^{-1} = & -W (\lambda / \lambda_1) \cdot [(\lambda_1 l_2 + \lambda_1 l_1 L - \lambda_2 L) / (bL_1 - bL - aL)] \\ & \cdot (S+L) (D-C)^{-1} L^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

根据定义并利用(9)和(24)式, 最后得到 L-S-L 系统的物点全息像的色模糊为

$$\begin{aligned} \Delta H_C = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda} \Delta \lambda = & \lambda_1 l_2 d (bl_1 - ad + bl_1 - bd) (\lambda_1 l_2 + \lambda_1 l_1 L - \lambda_2 L) \\ & \cdot (bl_1 - bL - aL)^{-1} (\lambda_1 l_2 + \lambda_1 l_1 d - \lambda_2 d)^{-2} \cdot W (S+L) (D-C)^{-1} L^{-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

利用成像的几何关系, d 和 L 的参量表式为

$$L = f(D-C) (D-C-f)^{-1} - S, \quad (26)$$

$$d = f[D(r-f) - rf] [(D-f)(r-f) - rf]^{-1} - S \quad (r > 0). \quad (27)$$

下面讨论几种特殊情况:

(i) 令 $D=C$ = 任选常数, 由成像的几何关系 $(D-C)^{-1} + (L+S)^{-1} = f^{-1}$ 得 $L+S \rightarrow -C$ 和 $L = -S$, 代入(25)式得

$$\begin{aligned} \Delta H_C \Big|_{D=C} = & \lambda_1 l_2 d (bl_1 - ad + bl_1 - bd) (\lambda_1 l_2 - \lambda_1 l_1 S + \lambda_2 S) \cdot (bl_1 + bS + aS)^{-1} \\ & \times (\lambda_1 l_2 + \lambda_1 l_1 d - \lambda_2 d)^{-2} \cdot S^{-1} \cdot W, \end{aligned} \quad (28)$$

这就是 Zhuang 等^[3]推得的色模糊表达式。

若再令 $l_1=l_2 \rightarrow \infty$ 和 $h \rightarrow 0$, 则有

$$\Delta H_C \Big|_{\substack{D=C \\ h \rightarrow 0 \\ l_1=l_2 \rightarrow \infty}} = (d/S) W, \quad (29)$$

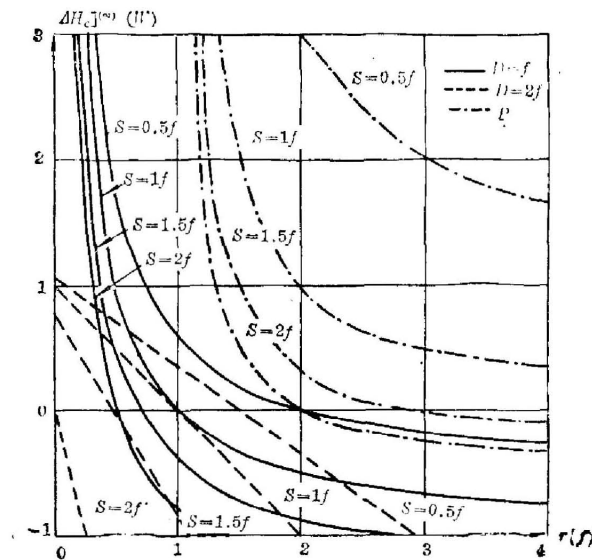


图 4 $\Delta H_C \sim r$ 曲线 ($C=0.25f$)
Fig. 4 $\Delta H_C \sim r$ curve ($C=0.25f$)

若另令 $l_1=l_2=a=b \rightarrow \infty$, 则有

$$\Delta H_C \Big|_{D=C}^{(\infty)} = (d/S) W, \quad (30)$$

这与 Chen^[7] 和 Wyant^[8] 所得到的结果相一致。

(ii) 令 $D=f$, 为了能与膜像光路作定量比较, 仍讨论平面波情况, 即 $l_1=l_2=a=b \rightarrow \infty$ 。膜像光路的色模糊为

$$\begin{aligned} \Delta H_C \Big|_{D=f}^{(\infty)} = & (d/S) W \\ = & [rf(r-f)^{-1} S^{-1} - 1] W \\ & (r > f), \end{aligned} \quad (31)$$

L-S-L 光路的色模糊由(25), (26)和(27)式得

$$\begin{aligned} \Delta H_C \Big|_{D=f}^{(\infty)} = & d(L+S) (D-C)^{-1} L^{-1} W \\ = & f [(f^2/r) - S] [f(f-C) \\ & + SC]^{-1} W \quad (r > 0). \end{aligned} \quad (32)$$

(iii) $D=2f$, 得

$$\begin{aligned} \Delta H_c]_{b=2f}^{(\infty)} &= d(L+S)(D-C)^{-1}L^{-1}W \\ &= [f(2f-r-S)][f^2+(f-C)(f-S)]^{-1}W \quad (0 < r < 2f), \end{aligned} \quad (33)$$

图 4 中曲线表示 ΔH_c 对 r 的关系。其中 $D=f$ 和 $D=2f$ 取 $C=0.25f$ 画出。因为参量 C 的变化对曲线的形状和位置的影响不太大, 所以从 $C=0.25f$ 曲线族就可了解到一般情况。图中 ΔH_c 以 W 为单位, r 以 f 为单位。由图看出 P , $D=f$ 和 $D=2f$ 三族曲线, 只要适当选取 S 值, 都可达到较低的色模糊度, 但从接收能量的角度考虑还是 L-S-L 系统较为有利。下面举一具体例子。设 $f=15\text{ cm}$, $W=2\text{ mm}$ 和 $\lambda_1=6328\text{ \AA}$ 。若要求一较低的色模糊如 $\Delta H_c \simeq 0.2\text{ mm}$, 由图 4 看出, 腰像光路在 $r \simeq 2f$ 时可以满足, 在这种情况下 $\Delta H_r \simeq 0.1\text{ mm}$; L-S-L 光路不论是 $D=f$ 或 $D=2f$, 在 $r \simeq f$ 时可以满足, 此时 $\Delta H_r \simeq 0.05\text{ mm}$ 。可见 L-S-L 光路不论是腰像或正像都可达到既有较高的分辨率又有较低的色模糊度。

(iv) $d=0$, 物点的像在全息干板平面上, 由 (25) 式得

$$\Delta H_c]_{d=0} = 0. \quad (34)$$

四、实例计算和实验

设实验条件: $f=18\text{ cm}$, $l_1 \simeq l_2 \simeq b = -a = 40\text{ cm}$, $\lambda_1 = 6328\text{ \AA}$, 物深 $\simeq 2\text{ cm}$ 。要求选出一组参量, 使所拍摄的彩虹全息图当用绿光 $\lambda = 5000\text{ \AA}$ 照明再现时能满足: 1) 正、腰像的最小分辨距离 $\Delta H_r < 0.03\text{ mm}$; 2) 正、腰像的色模糊 $\Delta H_c < 0.6\text{ mm}$; 3) 全息像的放大率 $\simeq 1$ 。

因为系统的参量较多, 可先选定几个参量的值, 如 $W=4\text{ mm}$ 和 $|L| \simeq 40\text{ cm}$ 。 d 很小, $l_1, l_2 \gg d$ 可以满足。这样, 由 (10) 式得 $\Delta H_r]^{(\infty)} \simeq \Delta H_r < 0.03\text{ mm}$ 和由 (25) 式得 $\Delta H_c]^{(\infty)} \simeq \frac{\lambda}{\lambda_1} \Delta H_c < 0.47\text{ mm}$ 。下面分别计算:

1) 腰像 设在 $D=f$ 情况下获取。将 $L = -40\text{ cm}$ 代入 (26) 式得 $C = 8.1\text{ cm}$ 。参看图 2 和 4, 试选 $r \simeq f$ 进行计算。因物深为 2 cm , 由式 (32) 知, 当选 $S=f$ 时得 $|\Delta H_c]_{b=f}^{(\infty)}| < 0.4\text{ mm}$ 。由 (16) 式得 $\Delta H_r]_{b=f}^{(\infty)} < 0.03\text{ mm}$ 。

2) 正像 设在 $D=2f$ 情况下获取。将 $L=40\text{ cm}$ 代入 (26) 式得 $C=9.9\text{ cm}$ 。我们仍以 $r \simeq f$ 进行试算。由 (33) 式知, 当选 $S=f$ 时得 $|\Delta H_c]_{b=2f}^{(\infty)}| < 0.44\text{ mm}$ 。由 (17) 式得 $\Delta H_r]_{b=2f}^{(\infty)} < 0.03\text{ mm}$ 。

由 (6) 和 (9) 式并结合成像的几何关系, 得 L-S-L 成像系统的全息像放大率

$$M_H = -\frac{da_1}{dt} = \lambda l_1 l_2 f^2 (\lambda l_1 l_2 + \lambda_1 l_1 d - \lambda_2 d)^{-1} [(D-f)(r-f) - rf]^{-1}. \quad (35)$$

将参量的值代入后得 $M_H \simeq 1$ 。

实验证明, 按上述计算的参量值按排光路, 可以获得非常清晰的准单色腰像和正像(附大小虎的正、腰像黑白相片二张)。当缝像的距离 L 较大时, 可获得同样清晰的彩虹色腰像和正像。全息像的色谱范围可由 L 的大小加以控制。我们还做了一个试验。用一只 2.7 mW 的多模激光器和两只直径 7 cm , 焦距 12 cm 的普通放大镜组成 L-S-L 光路。所摄全息图经铁氰化钾漂白后在 100 W 白炽灯或 250 W 红外灯照明下再现, 也能获得明亮清晰的准单色正、腰像和彩虹色正、腰像。这对于只有简单设备的实验室来摄制全息图是有意义

的。因为 L-S-L 系统有多个可调节参量，所以选择方法也很多。实际上，我们在 $D \leq f$ ， $D=1.25f$ ， $D=1.5f$ 和 $D=1.75f$ 都能获得很清晰的彩虹全息像(见图 5)。



正像

原像

图 5 彩虹全息像

Fig. 5 Rainbow holography

参 考 文 献

- [1] S. A. Benton; *J. Opt. Soc. Am.*, 1969, **59**, No. 11 (Nov), 1545.
- [2] H. Chen and F. T. S. Yu; *Opt. Lett.*, 1978, **2**, No. 4 (Apr), 85.
- [3] S. L. Zhuang, P. H. Ruterbusch, Y. W. Zhang and F. T. S. Yu; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 5 (Mar), 872.
- [4] F. T. S. Yu, P. H. Ruterbusch and S. L. Zhuang; *Opt. Lett.*, 1980, **5**, No. 10 (Oct), 443.
- [5] P. N. Tamura; *Appl. Opt.*, 1978, **17**, No. 21 (Nov), 3343.
- [6] J. C. Wyant; *Opt. Lett.*, 1977, **1**, No. 4 (Oct), 130.
- [7] H. Chen; *Appl. Opt.*, 1978, **17**, No. 20 (Oct), 3290.

L-S-L imaging system of one-step rainbow holography

LI ZHIMING REN HONYAO AND LIU SHUHUI
(Department of Physics, Zhejiang University)

(Received 12 March 1984; revised 15 May 1984)

Abstract

The general expression of the resolution and color blur of holographic image of object-point of the L-S-L imaging system is derived theoretically. A quantitative discussion is made on the characteristics of holographic image under certain experimental conditions, and an example is given to select the parameters of the L-S-L system according to various requests of image characteristics.