第4卷 第11期 光学学报 Vol. 4, No. 11
1984年11月 ACTA OPTICA SINICA November, 1984

在椭圆折射率介质中波动方程的解

沈鸿元
(中国科学院福建物质结构研究所)

提要

得到了椭圆折射率介质中波动方程的解。作为解的一个特殊情况也得到了均匀介质中椭圆高斯光束。文中还讨论了解的性质。

一、引言

在文章[1]中，我们从理论和实验上证实了泵浦过程正交晶系[0 1 0]取向的Nd·YAP晶体棒沿 x 取向和 z 取向(即[1 0 0]和[0 0 1]取向)的折射率呈现椭圆分布

$$n_x(xz)=n_{x0}\left[1-\frac{n_{xx}}{2n_{x0}}x^2-\frac{n_{xz}}{2n_{x0}}z^2\right],\tag{1a}$$

$$n_z(xz)=n_{z0}\left[1-\frac{n_{zx}}{2n_{z0}}x^2-\frac{n_{zz}}{2n_{z0}}z^2\right],\tag{1b}$$

式中 n_{x0} 和 n_{z0} 分别是棒截面中心处沿 x 方向和 z 方向的折射率，它们是常数，n_{xx}、n_{xz} 和 n_{zx}、n_{zz} 分别是对 x 方向偏振光和 z 方向偏振光起作用的介质沿 x 和 z 轴方向的分布参数。

文章[2]中，我们分析了含有椭圆折射率介质谐振腔中激光和横向场分布，结果表明，不论是沿 z 方向偏振的1.0795微米辐射还是沿 x 方向偏振的1.0645微米辐射，基横模高斯光束沿 x 方向和 z 方向的宽度 $W_{zx}(y)$、$W_{zz}(y)$ 和 $W_{xx}(y)$、$W_{xz}(y)$ 都是不相等的，它们呈现椭圆高斯光束的特性，实验证实基横模光斑的确呈椭圆状分布。

本文讨论在椭圆折射率介质中(暂不考虑介质的增益和损耗剖面)波动方程的解。作为解的一个特殊情况在均匀介质中解变成椭圆高斯光束。文中还讨论了解的一些性质。

二、椭圆折射率介质中波动方程的解

泵浦过程[0 1 0]取向Nd:YAP棒折射率由 $n_x(xz)$ 和 $n_z(xz)$ 给出，在这样的介质中，沿 x 方向和 z 方向偏振辐射场幅度的波动方程可以写成

$$\nabla u_x(xyz)+K_x^2(xz)u_x(xyz)=0,\tag{2a}$$

$$\nabla u_z(xyz)+K_z^2(xz)u_z(xyz)=0,\tag{2b}$$

式中

$$K_x(xz)=k_{x0}\left[1-\frac{k_{xx}}{2k_{x0}}x^2-\frac{k_{xz}}{2k_{x0}}z^2\right],$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}n_{x0}\left[1-\frac{n_{xx}}{2n_{x0}}x^2-\frac{n_{xz}}{2n_{x0}}z^2\right],\tag{3a}$$

收稿日期：1984年5月14日；收到修改稿日期：1984年7月4日

$$K_z(xz)=k_{z0}\left[1-\frac{k_{zx}}{2k_{z0}}x^2-\frac{k_{zz}}{2k_{z0}}z^2\right],$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}n_{z0}\left[1-\frac{n_{zx}}{2n_{z0}}x^2-\frac{n_{zz}}{2n_{z0}}z^2\right],\tag{3b}$$

由于沿 x 方向和 z 方向偏振辐射场幅度的波动方程具有相同的形式，我们只需对 x 方向偏振求解。对于近轴光线可取

$$u_x(xyz)=\varphi_x(xyz)\exp(-ik_{x0}y),\tag{4}$$

代入(2a)式，忽略 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ 项后，得到

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}-2ik_{x0}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-k_{x0}k_{xx}x^2\varphi-k_{x0}k_{xz}z^2\varphi=0,\tag{5}$$

与文献[3]类似，令

$$\varphi_x(xyz)=\exp\left\{-i\left[p_x(y)+\frac{k_{x0}}{2q_{xx}(y)}x^2+\frac{k_{x0}}{2q_{xz}(y)}z^2\right]\right\},\tag{6}$$

代入(5)式，得到

$$\frac{1}{q_{xx}^2(y)}+\left[\frac{1}{q_{xx}(y)}\right]'+\frac{k_{xx}}{k_{x0}}=0,\tag{7a}$$

$$\frac{1}{q_{xz}^2(y)}+\left[\frac{1}{q_{xz}^2(y)}\right]'+\frac{k_{xz}}{k_{x0}}=0,\tag{7b}$$

$$p_x'(y)=\frac{-i}{2}\left[\frac{1}{q_{xx}(y)}+\frac{1}{q_{xz}(y)}\right]。\tag{7c}$$

为了求解复数曲率半径在椭圆折射率介质中的传播规律，令

$$\frac{1}{q_{xx}(y)}=\frac{s_{xx}'(y)}{s_{xx}(y)},\tag{8}$$

代入(7a)式，得到

$$\frac{s_{xx}''(y)}{s_{xx}(y)}+\frac{k_{xx}}{k_{x0}}=0,\tag{9}$$

解上式，得到

$$s_{xx}(y)=a\sin\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\,y+b\cos\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\,y,\tag{10}$$

$$s_{xx}'(y)=a\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\cos\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\,y-b\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\sin\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\,y。\tag{11}$$

在 $y=0$ 处

$$q_{xx}(0)=\frac{s_{xx}(0)}{s_{xx}'(0)}=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{k_{x0}}{k_{xx}}},\tag{12}$$

式中 a、b 为待定常数。把(12)式代入(10)、(11)式，得到

$$q_{xx}(y)=\frac{q_{xx}(0)\cos\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\,y+\sqrt{\frac{k_{x0}}{k_{xx}}}\sin\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\,y}{-q_{xx}(0)\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\sin\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\,y+\cos\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\,y},\tag{13}$$

将(13)式分子与分母同除以 $\cos\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}$，得到

$$\frac{1}{q_{xx}(y)}=\frac{-q_{xx}(0)\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\,y+1}{q_{xx}(0)+\sqrt{\frac{k_{x0}}{k_{xx}}}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}}\,y},$$

将正切函数展开，并取

$$\operatorname{tg} x \doteq x, \tag{14}$$

得到

$$\frac{1}{q_{xx}(y)}=\frac{1}{q_{xx}(0)+y}-\frac{\frac{k_{xx}}{k_{x0}}q_{xx}(0)y}{q_{xx}(0)+y}, \tag{15a}$$

由(7b)式同样可得到

$$\frac{1}{q_{xz}(y)}=\frac{1}{q_{xz}(0)+y}-\frac{\frac{k_{xz}}{k_{x0}}q_{xz}(0)y}{q_{xz}(0)+y}, \tag{15b}$$

令

$$q_{xx}(0)=i\,\frac{\pi w_{xx}^2(0)n_{x0}}{\lambda};\quad q_{xz}(0)=i\,\frac{\pi w_{xz}^2(0)n_{x0}}{\lambda}, \tag{16}$$

这相当于在输出为椭圆高斯光束的平行平面谐振腔的激光器中，把坐标 $y=0$ 的点放在输出镜上的情况。此时，在输出平面镜上沿 x 轴和 z 轴方向，光斑大小分别为 $w_{xx}(0)$ 和 $w_{xz}(0)$ 波前为平面的椭圆高斯光束直接射入具有椭圆折射率分布的介质。

将(15a)和(15b)式代入(7c)式，得到

$$p_x(y)=\frac{-i}{2}\left\{\left[1+\frac{k_{xx}}{k_{x0}}q_{xx}^2(0)\right]\ln\left[1+\frac{y}{q_{xx}(0)}\right]-\frac{k_{xx}}{k_{x0}}q_{xx}^2(0)\left[1+\frac{y}{q_{xx}(0)}\right]\right.$$
$$\left.+\left[1+\frac{k_{xz}}{k_{x0}}q_{xz}^2(0)\right]\ln\left[1+\frac{y}{q_{xz}(0)}\right]-\frac{k_{xz}}{k_{x0}}q_{xz}^2(0)\left[1+\frac{y}{q_{xz}(0)}\right]\right\},$$

再将(16)式代入上式，经适当运算后，得到

$$\exp[-ip_x(y)]=\left[\frac{w_{xx}^2(0)}{w_{xx}^2(y)}\right]^{\frac{1}{4}\left[1+\frac{k_{xx}}{k_{x0}}\left(\frac{\pi w_{xx}^2(0)n_{x0}}{\lambda}\right)^2\right]}\times\left[\frac{w_{xz}^2(0)}{w_{xz}^2(y)}\right]^{\frac{1}{4}\left[1+\frac{k_{xz}}{k_{x0}}\left(\frac{\pi w_{xz}^2(0)n_{x0}}{\lambda}\right)^2\right]}$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{2}\left[1+\frac{k_{xx}}{k_{x0}}\left(\frac{\pi w_{xx}^2(0)n_{x0}}{\lambda}\right)^2\operatorname{tg}^{-1}\frac{\lambda y}{\pi w_{xx}^2(0)n_{x0}}\right.\right.$$
$$+\frac{i}{2}\left[1+\frac{k_{xz}}{k_{x0}}\left(\frac{\pi w_{xz}^2(0)n_{x0}}{\lambda}\right)^2\right]\operatorname{tg}^{-1}\frac{\lambda y}{\pi w_{xz}^2(0)n_{x0}}$$
$$+\frac{k_{xx}}{2k_{x0}}\left(\frac{\pi w_{xx}^2(0)n_{x0}}{\lambda}\right)^2\left[1-\frac{i\lambda y}{\pi w_{xx}^2(0)n_{x0}}\right]+\frac{k_{xz}}{2k_{x0}}$$
$$\left.\times\left(\frac{\pi w_{xz}^2(0)n_{x0}}{\lambda}\right)^2\left[1-\frac{i\lambda y}{\pi w_{xz}^2(0)n_{x0}}\right]\right\}。 \tag{17}$$

(6)式中 $\varphi_x(xyz)$ 指数的后面两项，可将(15a)，(15b)和(16)式代入，经适当运算后，得到

$$\exp\left[\frac{-ik_{x0}}{2q_{xx}(y)}x^2-\frac{ik_{x0}}{2q_{xz}(y)}z^2\right]$$

$$=\exp\left\{-x^2\left[\left(\frac{1}{w_{xx}^2(y)}+\frac{k_{xx}y^2w_{xx}(0)\left[w_{xx}^2(y)-w_{xx}^2(0)\right]^{\frac{1}{2}}}{2w_{xx}^2(y)}\right)\right.\right.$$

$$\left.+i\left(\frac{k_{x0}}{2R_{xx}(y)}-\frac{k_{xx}y\left[R_{xx}(y)-y\right]}{2R_{xx}(y)}\right)\right]$$

$$-z^2\left[\left(\frac{1}{w_{xz}^2(y)}+\frac{k_{xz}y^2w_{xz}(0)\left[w_{xz}^2(y)-w_{xz}^2(0)\right]^{\frac{1}{2}}}{2w_{xz}^2(y)}\right)\right.$$

$$\left.\left.+i\left(\frac{k_{x0}}{2R_{xz}(y)}-\frac{k_{xz}y\left[R_{xz}(y)-y\right]}{2R_{xz}(y)}\right)\right]\right\}。\tag{18}$$

结合(4)、(17)、(18)式，最后得到解为

$$u_x(xyz)=\left[\frac{w_{xx}^2(0)}{w_{xx}^2(y)}\right]^{\frac{1}{4}\left(1+\frac{k_{xx}}{k_{x0}}y_{x0}^2\right)}\times\left[\frac{w_{xz}^2(0)}{w_{xz}^2(y)}\right]^{\frac{1}{4}\left(1+\frac{k_{xz}}{k_{x0}}y_{z0}^2\right)}$$

$$\times\exp\left\{-ik_0y+\frac{i}{2}\left[1+\frac{k_{xx}}{k_{x0}}y_{x0}^2\right]\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{y_{x0}}+\frac{i}{2}\left[1+\frac{k_{xz}}{k_{x0}}y_{z0}^2\right]\right.$$

$$\times\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{y_{z0}}+\frac{k_{xx}}{2k_{x0}}y_{x0}^2\left(1-\frac{iy}{y_{x0}}\right)+\frac{k_{xz}}{2k_{x0}}y_{z0}^2\left(1-\frac{iy}{y_{z0}}\right)$$

$$-x^2\left[\left(\frac{1}{w_{xx}^2(y)}+\frac{k_{xx}y^2w_{xx}(0)\left[w_{xx}^2(y)-w_{xx}^2(0)\right]^{\frac{1}{2}}}{2w_{xx}^2(y)}\right)\right.$$

$$\left.+i\left(\frac{k_{x0}}{2R_{xx}(y)}-\frac{k_{xx}y\left[R_{xx}(y)-y\right]}{2R_{xx}(y)}\right)\right]$$

$$-z^2\left[\left(\frac{1}{w_{xz}^2(y)}+\frac{k_{xz}y^2w_{xz}(0)\left[w_{xz}^2(y)-w_{xz}^2(0)\right]^{\frac{1}{2}}}{2w_{xz}^2(y)}\right)\right.$$

$$\left.\left.+i\left(\frac{k_{x0}}{2R_{xz}(y)}-\frac{k_{xz}y\left[R_{xz}(y)-y\right]}{2R_{xz}(y)}\right)\right]\right\}。\tag{19}$$

(17)、(18)和(19)式中

$$w_{xx}^2(y)=w_{xx}^2(0)\left\{1+\left[\frac{\lambda y}{\pi w_{xx}^2(0)n_{x0}}\right]^2\right\},$$
$$w_{xz}^2(y)=w_{xz}^2(0)\left\{1+\left[\frac{\lambda y}{\pi w_{xz}^2(0)n_{x0}}\right]^2\right\},\tag{20}$$

$$R_{xx}(y)=y\left\{1+\left[\frac{\pi w_{xx}^2(0)n_{x0}}{\lambda y}\right]^2\right\},$$
$$R_{xz}(y)=y\left\{1+\left[\frac{\pi w_{xz}^2(0)n_{x0}}{\lambda y}\right]^2\right\},\tag{21}$$

$$y_{x0}=\frac{\pi w_{xx}^2(0)n_{x0}}{\lambda},$$
$$y_{z0}=\frac{\pi w_{xz}^2(0)n_{x0}}{\lambda}。\tag{22}$$

从(19)式看到在椭圆折射率介质中，光束的横向场分布是不相等的，因此，不可能得到径向对称的高斯光束，既使让(16)式中 $q_{xx}(0)=q_{xz}(0)=q(0)$，因而(20)式中 $w_{xx}(y)=w_{xz}(y)$，但因为 $k_{xx}\neq k_{xz}$，所以(19)式中的横向场分布还是不相等的。

目前得到的解没有反应出光束的周期变化，这是由于我们在解的过程中作了一个近似，

在(14)式中取 $\operatorname{tg} x \cong x$, 显然, 这只有在 $|x| \ll \frac{\pi}{2}$ 时才行, 所以(19)式仅近似地描述了满足上述条件的一段椭圆折射率介质的传播规律, 但是由于周期性, 我们可以对超出上述范围的传播规律作一定的估计。

对于沿 z 方向偏振辐射场幅度可以得到类似的结果。

三、均匀介质中波动方程的解

文献[3]已经得到了均匀介质中波动方程的解, 它是径向对称的高斯光束。

在上面的求解过程中令 $k_{xx}=k_{xz}=0$, 我们也能得到均匀介质中波动方程的解, 此时, 由(19)式得到

$$u_x(xyz)=\sqrt{\frac{w_{xx}(0)w_{xz}(0)}{w_{xx}(y)w_{xz}(y)}}\exp\Big\{-i\left[k_{x0}y-\eta_{xx}(y)-\eta_{xz}(y)\right]$$
$$-x^2\left[\frac{1}{w_{xx}^2(y)}+\frac{ik_{x0}}{2R_{xx}(y)}\right]-z^2\left[\frac{1}{w_{xz}^2(y)}+\frac{ik_{x0}}{2R_{xz}(y)}\right]\Big\}, \tag{23}$$

式中

$$\eta_{xx}(y)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{y_{x0}}; \quad \eta_{xz}(y)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{y_{z0}}。 \tag{24}$$

其它参数由(20)、(21)和(22)式给出。

方程(23)已不再是径向对称的高斯光束了, 它是椭圆高斯光束。

我们在高功率 Nd:YAP 连续激光器中遇到了这种情况, 由于泵浦过程的热效应使正交晶系 Nd:YAP 棒的折射率 $n_x(xz)$ 和 $n_z(xz)$ 呈现椭圆折射率分布, 这使得工作物质对沿 x 方向偏振(或者 z 方向偏振)的辐射在 x 轴方向和 z 轴方向的聚焦程度是不同的, 从而导致椭圆高斯光束的产生。

从(20)～(23)式和(15)式我们看到在 xy 平面和 zy 平面内光斑宽度、波前曲率半径或者复数曲率半径的传播规律都与一般高斯光束的传播规律相同。对于沿 z 方向的偏振情况完全相同。因此, 我们可以把遭受热效应的 Nd:YAP 棒当作 $n_x(x)$, $n_x(z)$, $n_z(x)$ 和 $n_z(z)$ 四个类似透镜介质来处理谐振腔的设计问题。

从(20)式可以看到, 在

$$y_{xE}=\frac{\pi w_{xx}(0)w_{xz}(0)n_{x0}}{\lambda} \tag{25}$$

处, 沿 x 方向和 z 方向的光斑宽度相等

$$w_{xx}^2(y_{xE})=w_{xz}^2(y_{xE})=w_{xx}^2(0)+w_{xz}^2(0)。 \tag{26}$$

这对于圆孔选模得到基横模激光是很重要的, 此时, 应该把圆孔放在距输出平面镜 y_{xE} 处。

将(21)式对 y 求微分并令其等于零, 得到

$$\begin{aligned} y_{xx\,\min}&=\frac{\pi w_{xx}^2(0)n_{x0}}{\lambda}, \\ y_{xz\,\min}&=\frac{\pi w_{xz}^2(0)n_{x0}}{\lambda}。\end{aligned} \tag{27}$$

在这些位置上曲率半径最小, 分别为

$$R_{xx}[y_{xx\,\min}]=\frac{2\pi w_{xx}^2(0)n_{x0}}{\lambda},$$
$$R_{xz}[y_{xz\,\min}]=\frac{2\pi w_{xz}^2(0)n_{x0}}{\lambda}。\tag{28}$$

比较(27)式和(28)式可以看到这二波前中心分别在 $y_{xx\,\min}$ 和 $y_{xz\,\min}$ 处。

由(23)式可以看到光强 I 为

$$I_x(xyz)=u_x(xyz)\cdot u_x^*(xyz)=\frac{w_{xx}(0)w_{xz}(0)}{w_{xx}(y)w_{xz}(y)}\exp\left\{-\frac{x^2}{w_{xx}^2(y)}-\frac{z^2}{w_{xz}^2(y)}\right\},$$

将指数展开取其前二项，得到

$$\frac{x^2}{w_{xx}^2(y)\left[1-\dfrac{I_x(xyz)w_{xx}(y)w_{xz}(y)}{w_{xx}(0)w_{xz}(0)}\right]}+\frac{z^2}{w_{xz}^2(y)\left[1-\dfrac{I_x(xyz)w_{xx}(y)w_{xz}(y)}{w_{xx}(0)w_{xz}(0)}\right]}=1,\tag{29}$$

从(29)式看到等光强的轨迹的确是一椭圆。只有在 $y=y_{xE}$ 处，$w_{xx}(y_{xE})=w_{xz}(y_{xE})$，椭圆才退化为圆。

了解椭圆高斯光束这些性质对使用这种光束是很有用的。

参 考 文 献

[1] 沈鸿元；《物理学报》，1981, **30**, No. 8, 1085.
[2] 沈鸿元，周玉平，于桂芳，黄小良，吴彩明，倪玉云；《物理学报》，1982, **9**, No. 9, 1235.
[3] H. Kogelnik; "*Applied Optics*", 1966, **5**, 1550.

The solution of wave equation with an elliptic refractive index media

SHEN HONGYUAN
(*Fujian Institute of Research on the Structure of Matter, Chinese Academy of Sciences, Fuzhou Fujian China*)

(Received 14 May 1984; revised 4 July 1984)

Abstract

The solution of wave equation with an elliptic refractive index media has been obtained. As a particular example the elliptic Gaussium beams in homogeneous medium also has been obtained. The properties of the solution have been discussed.