

变折射率介质中光线的追迹

卢 文 全

(桂林光通信研究所)

提 要

本文根据 A. Sharma 等人^[1]提出的方法,给出了变折射率介质中光线追迹的矢量表达式;并提供了一个判断计算结果可靠与否的误差函数。在计算例子中,提出并讨论了用高精度的数值解来判断某些近似解析解所适用的范围。

一、引 言

从数学上看,变折射率介质中的光线追迹问题,归结为求解如下形式的光线方程^[2]

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right) = \text{grad}(n), \quad (1)$$

式中 ds 是光线轨迹上一段无限小的弧长; $\mathbf{R} = xi + yj + zk$ 是光线上任一点的位置坐标; n 是折射率,它是空间点的坐标的标量函数。

由于(1)式仅对十分有限的几种折射率分布才能获得严格的解析解,所以人们一直在寻找它的数值解法。1968年 Montagnino^[3]对方程(1)提出过一个数值解法,这个方法的优点是很有普遍性的;缺点是花费计算时间较多。1982年 Sharma 等人^[1]对光线方程稍加变换之后,用标准的龙格-库塔方法来求变换后的方程的数值解,获得了令人满意的结果。我们在本文中导出了用龙格-库塔方法求光线方程数值解的矢量表达式,并提供了一个判断计算结果可靠与否的误差函数。结合具体计算例子,还提出和讨论了利用高精度的数值解说明某些近似解析解所适用的范围。

二、变折射率介质中光线追迹的理论

按 Sharma 等人^[1]的作法,令(1)式中的 ds 为

$$ds = n \cdot dt, \quad (2)$$

式中 t 是一标量参数。把(2)式代入(1)式便得到变换后的光线方程

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F} = \begin{cases} n \cdot \text{grad}(n), & \text{或} \\ \frac{1}{2} \text{grad}(n^2). \end{cases} \quad (3a)$$

$$(3b)$$

若 n^2 的表达式中不含 x, y, z 的交叉项,用(3b)式进行计算是方便的。按照微分方程的数值解法,需要把(3)式降阶,为此特定义一个矢量 \mathbf{T} 满足

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{T}_0 \quad (4)$$

这样(3)式就变成

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{F}_0 \quad (5)$$

把(2)式中的 dt 代入(4)式还可以得到光线方向的单位矢量 $\mathbf{S} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ 与 \mathbf{T} 之间的关系为

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{T}}{n} \quad (6)$$

用求微分方程数值解的龙格-库塔方法来解由(4)式和(5)式组成的微分方程组, 我们得到用矢量表达的如下形式的解

$$\mathbf{R}_{j+1} = \mathbf{R}_j + \Delta t \mathbf{T}_j + \frac{1}{6} \Delta t^2 \mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j, \quad j=1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

$$\mathbf{T}_{j+1} = \mathbf{T}_j + \frac{1}{6} \Delta t \mathbf{F}_j + \mathbf{B}_j \quad (8)$$

上面两式中的 Δt 是数值计算时所取的步长; \mathbf{A}_j , \mathbf{B}_j 和 \mathbf{F}_j 由下面的公式给出

$$\mathbf{A}_j = \frac{1}{8} \Delta t^3 \mathbf{C}_j, \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_j = \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{C}_j + \frac{1}{6} \Delta t \mathbf{D}_j, \quad (10)$$

$$\mathbf{D}_j = \mathbf{F} \left(x_j + \Delta t T_{jx} + \frac{1}{2} \Delta t G_{jx}, y_j + \Delta t T_{jy} + \frac{1}{2} \Delta t G_{jy}, z_j + \Delta t T_{jz} + \frac{1}{2} \Delta t G_{jz} \right), \quad (11)$$

$$\mathbf{G}_j = \Delta t \mathbf{C}_j, \quad (12)$$

$$\mathbf{C}_j = \mathbf{F} \left(x_j + \frac{1}{2} \Delta t T_{jx} + \frac{1}{8} \Delta t E_{jx}, y_j + \frac{1}{2} \Delta t T_{jy} + \frac{1}{8} \Delta t E_{jy}, z_j + \frac{1}{2} \Delta t T_{jz} + \frac{1}{8} \Delta t E_{jz} \right), \quad (13)$$

$$\mathbf{E}_j = \Delta t \mathbf{F}_j, \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}(x_j, y_j, z_j). \quad (15)$$

这样, 给定了折射率分布函数 $n(\mathbf{R})$, 光线入射的初始位置 \mathbf{R}_0 和光线初始方向 \mathbf{S}_0 与 $n(\mathbf{R}_0)$ 的乘积 \mathbf{T}_0 以及步长 Δt 之后, 由(3)式和(7)~(15)式便可以完成光线的追迹。追迹计算的结果是否可信, 还需要加以说明。为此, 我们进一步研究了光线曲率矢量的表达式。光线曲率矢量 \mathbf{K} 已经表示成^[3]

$$\mathbf{K} = \frac{1}{n} \{ \text{grad}(n) - [\text{grad}(n) \cdot \mathbf{S}] \mathbf{S} \}. \quad (16)$$

把(5)式和(6)式代入(16)式便获得用 n , \mathbf{F} 和 \mathbf{T} 来表示的 \mathbf{K} ,

$$\mathbf{K} = \frac{1}{n^3} [n^2 \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) \mathbf{T}]. \quad (17)$$

用(17)式标乘 \mathbf{T} 得到

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{T} = 0. \quad (18)$$

(18)式是光线自身的几何特性。利用这一公式可以判断光线追迹计算结果的可靠性。为了方便起见, 我们按(19)式定义了一个误差函数 $f(\mathbf{K}, \mathbf{T})$

$$f(K, T) = \log |K \cdot T|. \quad (19)$$

显然, $f(K, T)$ 趋于 $-\infty$ 时表示计算结果接近于真值。

三、计算例子

第二节中所导出的公式是相当普遍的。将可能有的折射率分布函数代入(3)式和(7)~(15)式, 组织编写好计算程序就可以迅速获得所需要的结果。在这里我们以目前国内感兴趣^[5]的一种具有正向抛物线型分布折射率的玻璃板为例, 对其传光特性作一些分析。按图1所示的方式来使用这种板, 其折射率分布应写成

$$n = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} A y^2 \right), \quad |y| \leq \frac{b}{2}, \quad (20)$$

式中 n_0 和 A 是玻璃板的光学常数; b 是板的厚度。把(20)式代入第二节中的有关公式便可以编制出具体的计算程序。在程序中 n_0 和 A ; 步长 Δt ; 光入射点的坐标 x_0, y_0, z_0 以及方向 T_{x_0}, T_{y_0} , 和 T_{z_0} (注意光线空间方向 \mathbf{S} 与 \mathbf{T} 由(6)式联系着) 作为输入量或循环参数, 输出则根据需要选取。

显然, 一组光线入射点位置和方向初始值描写了一条确定的光线。按照入射光线方向的不同, 可以是子午光线, 也可以是斜光线; 可以是平行光线, 也可以是会聚光线。为了与文献[4]进行比较, 我们选取了如图1所示的在 yOz 平面内 y_{i0} 点入射的平行子午光线加以计算, 其结果示于图2、图3和图4。

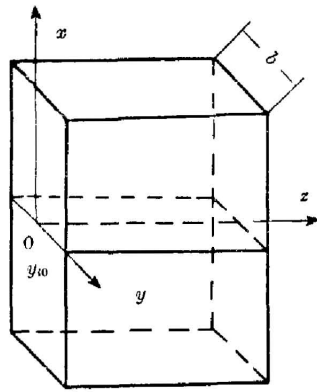


图1 变折射率玻璃板 $n = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} A y^2 \right)$

Fig. 1 Glass plate with gradient index

$$n = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} A y^2 \right)$$

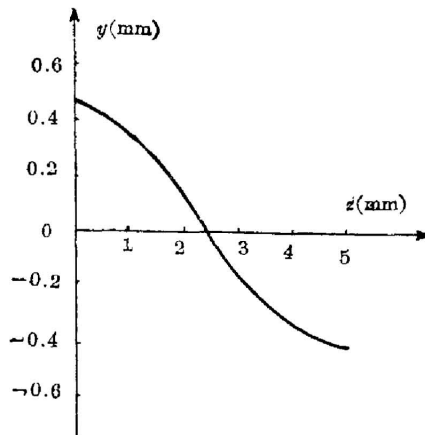


图2 数值计算的光线轨迹

Fig. 2 Light-ray trajectory obtained by numerical calculation

$n_0 = 1.5$; $A = 0.5 (1/\text{mm}^2)$; $\Delta t = 0.1 \text{ mm}$

图2是实际计算的光线轨迹, 它与余弦曲线有一定差别。图3是误差函数 $f(K, T)$ 与步长 Δt 的关系曲线。显然, Δt 越小, 计算结果越接近真值。图4中的 $P(y)$ 是这样定义的

$$P(y) = \log(|y - y_a|), \quad (21)$$

式中 y 是用足够小的步长 Δt , 由本文数值计算的值。我们把它作为比较基准。 y_a 则是对于(20)式折射率分布目前广泛采用的一种近似的解析解^[4]。即

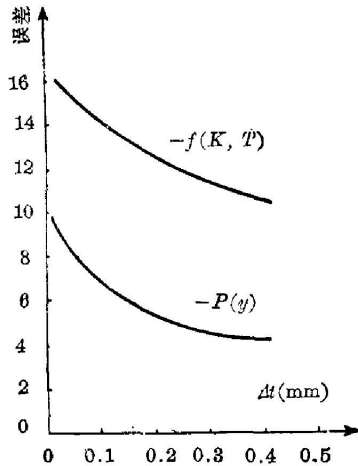
图3 数值计算误差与步长 Δt 的关系

Fig.3 Function relation between the error of numerical calculation and extrapolation increment Δt

$n_0=1.5$; $A=0.5(1/\text{mm}^2)$; $y_{i0}=0.1\text{mm}$

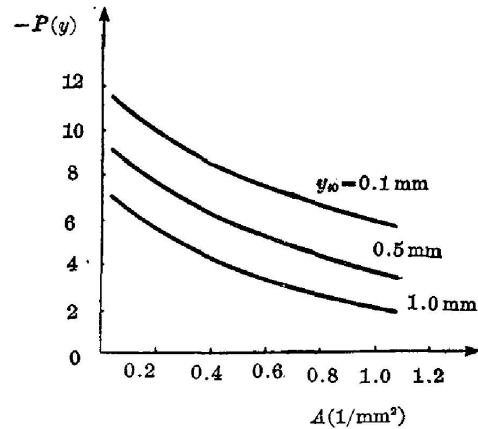
图4 位置误差 $P(x)$ 与参数 A 和 y_{i0} 的关系

Fig.4 Function relation of position error with parameter A and y_{i0}

$n_0=1.5$; $\Delta t=0.1\text{mm}$

$$y_a = y_{i0} \cos(\sqrt{A}z), \quad (22)$$

式中 y_{i0} 是计算时取的 y 方向的初始位置(见图1)。计算所取的全部初始条件是

$$\begin{cases} x_0 = z_0 = 0, \\ y_{i0} = 0.1, 0.5, 1.0(\text{mm}), \\ T_{x0} = T_{y0} = 0, \\ T_{z0} = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} A y_{i0}^2\right). \end{cases} \quad (23)$$

四、讨论与结论

对于(20)式所描述的折射率分布,目前广泛采用形如(22)式所表达的近似解析解。在讨论纤维光学器件的设计时,人们提出了这种正余弦解究竟在多大程度上适用的问题。

为了回答这一问题,首先必须找到比较的基准。严格的解析解当然是最好的比较基准。但遗憾的是,在变折射率光学中,即使对(20)式这种并不算复杂的折射率分布,目前也未能找到严格的解析解。因此,在本文中我们提出用最好的数值解法获得的高精度数值解来作为比较基准。由图2和图3可见,本文给出的公式和计算程序是可行的。从而由图4可见对于不同计算精度要求,光线的入射高度和玻璃板的 A 值,(22)式这种近似解仅在一定范围内才是适用的。例如,取 $P(y) = -6$ 时,对于图中列出的三个 y_{i0} 值,其 $\frac{1}{2} A y^2$ 应分别小于 0.0047、0.0538 和 0.0650。

对于变折射率介质中的光线追迹,本文采用的是较好的方法。文中提出的误差函数 $f(K, T)$ 对于判断计算结果的可靠性是有用的。公式(7)~(15)的排列次序也有意义,在编写计算程序时,只要把这些公式按分量形式顺次倒过来写就行了。

在进行本文的计算工作中,我所计算机组的同志们给了我使用计算机的方便与协助。借此向他们表示感谢。

参 考 文 献

- [1] A. Sharma, *et al.*; *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 6 (Mar), 984.
- [2] M. 玻恩和 E. 沃耳夫;《光学原理》, (杨葭荪等译校, 科学出版社, 北京)上册第 165 页。
- [3] L. Montagnino; *J. Opt. Soc. Am.*, 1968, **58**, No. 10 (Oct), 1667.
- [4] 程科华;《光学学报》, 1982, **2**, No. 2 (Mar), 171.
- [5] 祝颂来, 殷宗敏;《光学学报》, 1983, **3**, No. 5 (Aug), 456.

Ray tracing in gradient-index media

LU WENQUAN

(Guilin Institut of Optical Communication)

(Received 6 February 1984)

Abstract

According to the presented method by A. Sharma^[1] the vector-expression of ray tracing in gradient-index media have been derived and an error function is defined in this paper. With an example of the computation it is shown by the numerical solution of high accuracy that the regions for aptness of some analytical approaching solution which is used often are presented and discussed.