

# 一种激光纹影仪的光学特性

单子娟 王定兴 李正直  
(苏州大学物理系)

## 提 要

本文采用带有中央相位跃变间隔的光栅作为空间滤波器,并用希尔伯特变换对这种激光纹影仪的光学特性进行了分析。实验结果与离散希尔伯特变换的计算结果相符。同时给出了应用实例。

激光纹影仪可用于研究不同介质中的光学非均匀性。在等离子体、气体动力学、燃烧过程的研究中,以及光学元件高级象差和表面质量的检测中,都得到了广泛的运用。它还可以研究透明溶液和透明固体内弱相位非均匀性。

本文采用相位跃变光栅作为希尔伯特变换滤波器,对激光纹影仪的光学特性进行了分析。为了验证实验结果,还用微处理机计算了离散希尔伯特变换。实验表明,这种激光纹影仪可以在某些工厂和实验室中得到应用。

## 一、激光纹影仪的基本原理

图1是激光纹影仪的光学系统示意图。其中 $S$ 是He-Ne激光器, $P_0$ 为针孔滤波器, $L_0$ 是扩束透镜, $L_0$ 为准直透镜, $L_1$ 是傅氏变换透镜, $L_2$ 是逆傅氏变换透镜, $P_1$ 是物平面, $P_2$ 为放置空间滤波器的频谱面, $P_3$ 是象平面。相位跃变光栅与普通光栅的区别在于:它是由左右两半光栅组合而成,其光栅常数为 $d$ ,而中央间隔为 $d'$ (如图2(a)所示)。对于 $d'$ 的中点而言,该相位跃变光栅的左右两半的复振幅透射率应具有 $\pi$ 相位跃变。因此 $d'$ 必须是 $d/2$ 的奇数倍,它可由下式表示:

$$d' = (2m-1)d/2, \quad (1)$$

式中的 $m$ 为正整数,可取1或2。在本装置中,我们采用 $d=20\mu\text{m}$ , $m=2$ ,则 $d'=30\mu\text{m}$ 的朗奇光栅作为具有中央相位跃变间隔的光栅。如果把相位跃变光栅置于频谱面 $P_2$ 上,且 $d'$ 的中点位于仪器的光轴上。由于实际上我们仅利用该相位跃变光栅的一级衍射,此时该

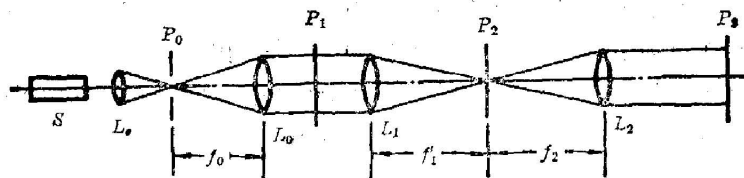


图 1

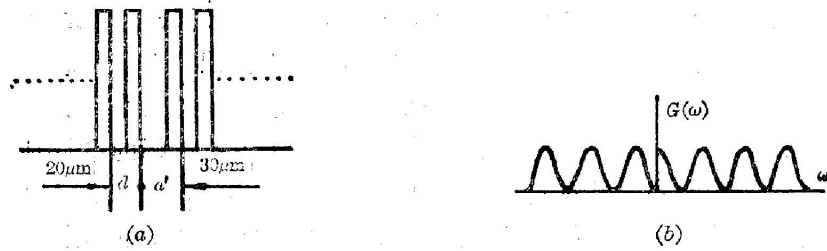


图 2

光栅的振幅透射率  $G(\omega)$  等效于相位跃变的余弦光栅的振幅透射率, 即为下式所示(参见图 2(b)):

$$G(\omega) = 1 + \cos(\omega x_0) \cdot \text{sgn}(\omega). \quad (2)$$

上式中  $\text{sgn}(\omega)$  是符号函数。

设相位物体的物函数为  $f(x)$ , 该函数的希尔伯特变换定义为<sup>[1]</sup>:

$$f_H(x) = H[f(x)] = (P/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} [f(x')/(x'-x)] dx' = -(P/\pi) (1/x) \otimes f(x). \quad (3)$$

上式中符号  $P$  表示积分取柯西主值。  $f_H(x)$  的傅氏变换为:

$$F_H(\omega) = iF(\omega) \text{sgn}(\omega). \quad (4)$$

由此可见, 如采用复振幅透射率为  $i \text{sgn}(\omega)$  的空间滤波器, 便可以使物函数  $f(x)$  经滤波后, 在象平面上得到  $f(x)$  的希尔伯特变换  $f_H(x)$ 。

如果在频谱面  $P_2$  上置放相位跃变光栅空间滤波器, 相位物函数  $f(x)$  经滤波后, 再经  $L_2$  透镜的逆傅氏变换, 那么在象平面  $P_3$  上复振幅分布将为:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega) [1 + \cos \omega x_0 \cdot \text{sgn}(\omega)]\} \\ &= f(x) + (1/2)f(x) \otimes g(x) \otimes [\delta(x-x_0) + \delta(x+x_0)]. \end{aligned} \quad (5)$$

上式中  $g(x)$  是符号函数  $\text{sgn}(\omega)$  的逆傅氏变换, 它等于  $g(x) = \mathcal{F}^{-1}[\text{sgn}(\omega)] = -1/i\pi x$ 。由 (3) 式定义, (5) 式可写成:

$$f'(x) = f(x) + (1/2i)f_H(x)|_{x=x_0} + (1/2i)f_H(x)|_{x=-x_0}. \quad (6)$$

上式中第一项是相位跃变光栅的零级光的复振幅分布, 它显示出原物函数  $f(x)$ , 第二、第三项分别表示在  $(\pm 1)$  级衍射处, 为原物函数  $f(x)$  的希尔伯特变换  $f_H(x)$ 。因此, 相位跃变光栅滤波器亦可称为希尔伯特变换滤波器, 它在  $(\pm 1)$  级衍射处亦得到原物函数的希尔伯特变换。

当相位物具有弱相位变化时, 相位物的相位分布可转换为象的强度分布。例如, 原物是以空间频率  $\omega_0$  作余弦变化的弱相位物, 且限制物的孔径为  $D$ , 那么物函数可写成:

$$f(x) = [\exp(ia \cos \omega_0 x)] \text{rect}(x/D) \doteq [1 + ia \cos \omega_0 x] \cdot \text{rect}(x/D) \quad (a \ll 1). \quad (7)$$

原物函数  $f(x)$  经希尔伯特变换滤波器滤波后, 在一级衍射处的视场中, 象的复振幅分布可写成:

$$f_H(x) = -ia \sin \omega_0 x + (1/\pi) \ln |(x-D/2)/(x+D/2)|. \quad (8)$$

## 二、相位跃变光栅的光学特性

相位跃变光栅作为希尔伯特变换空间滤波器的优点在于: 它的空间滤波作用, 不因波长

改变而产生影响；对于温度与湿度的变化，影响亦不大。与相位刀口<sup>[2]</sup>相比，目前制造光栅的技术更为完善。而且，制造相位跃变光栅的中央间隔  $d'$  的误差对象平面上 ( $\pm 1$ ) 级的振幅分布的影响，比相位刀口两半边吸收系数不同所引起的相应误差为小。前者只引起 ( $\pm 1$ ) 级的光强分布中心零点的移动，而后者将使原物函数叠加到其复振幅的希尔伯特变换中去。下面叙述由于中央间隔  $d'$  的误差对光强分布的影响。现用相位  $\alpha$  表示实际的间隔与原设计间隔  $d'$  的差异引起的跃变相位移动量。此时，实际的相位跃变光栅的振幅透射率  $G_\alpha(\omega)$  为

$$G_\alpha(\omega) = 1 + \cos \omega x_0 \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sgn}(\omega) + \sin \omega x_0 \cdot \sin \alpha。$$

那么，在象平面  $P_3$  上(见图 1)，振幅分布为：

$$f'(x) = (1/2) \{ f(x) + (1/2i) [\cos \alpha \cdot f_H(x) - \sin \alpha \cdot f(x)]_{x=x_0} + (1/2i) [\cos \alpha \cdot f_H(x) + \sin \alpha \cdot f(x)]_{x=-x_0} \}。 \quad (9)$$

由上式可见，在相位跃变光栅零级衍射光中，仍然保留原物函数  $f(x)$ ，而 ( $\pm 1$ ) 级衍射光是原物函数  $f(x)$  与它的希尔伯特变换  $f_H(x)$  的线性组合。当  $\alpha=0$  时，(9) 式过渡到(6)式。相应于(9)式的 (+1) 级衍射的光强度分布为：

$$I_\alpha(x) = |\cos \alpha \cdot f_H(x) - \sin \alpha \cdot f(x)|^2 = \cos^2 \alpha |f_H(x)|^2 + \sin^2 \alpha |f(x)|^2 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{Re}[f(x) \cdot f_H^*(x)]。 \quad (10)$$

下面分析相位跃变光栅的光学特性，以及验证其光学变换的功能。我们采用一种简单的光路图，用单狭缝或圆孔作为物，而将相位跃变光栅和物一起放置于物平面上，直接在频谱面 ( $\pm 1$ ) 级衍射处观察衍射场的光强分布，如图 3 所示。图中  $L_2$  透镜的作用在于将衍射图进行放大，以便在  $P_2'$  面上进行观察和测量。此时仍用  $f(x)$  表示物函数， $G(x)$  表示位于物平面上的相位跃变光栅。那么在频谱面上衍射场的复振幅分布  $F'(\omega)$  由下式表示：

$$F'(\omega) = \mathcal{F}\{f(x) \cdot G(x)\} = \mathcal{F}\{f(x) [1 + \cos(\omega_0 x) \cdot \operatorname{sgn}(x)]\} = F(\omega) - (1/2i) F_H(\omega)|_{\omega=\omega_0} - (1/2i) F_H(\omega)|_{\omega=-\omega_0}。 \quad (11)$$

对于物为单狭缝时，(11) 式第一项表示它在频谱面上零级衍射场的复振幅分布，即为  $F(\omega) = \operatorname{sinc}(\omega)$ 。而(11)式中第二、第三项表示在 ( $\pm 1$ ) 级衍射处， $\operatorname{sinc}(\omega)$  的希尔伯特变换  $F_H(\omega) = H[\operatorname{sinc}(\omega)]$ 。

如果相位跃变光栅的实际中央间隔与原设计间隔存在误差时，它将引起衍射场振幅分布的变化。图 4 中实线曲线表示  $\operatorname{sinc}(\omega)$  的离散希尔伯特变换(见下节计算)。虚线曲线表示  $\alpha=0.175$  时的离散希尔伯特变换曲线。与实线曲线相比，虚线曲线的中央零点从 0 点移到  $b$  点。

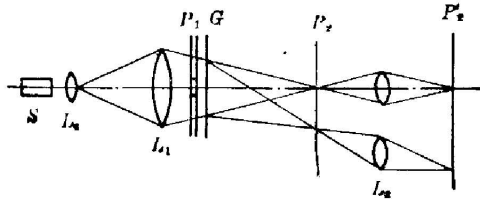


图 3

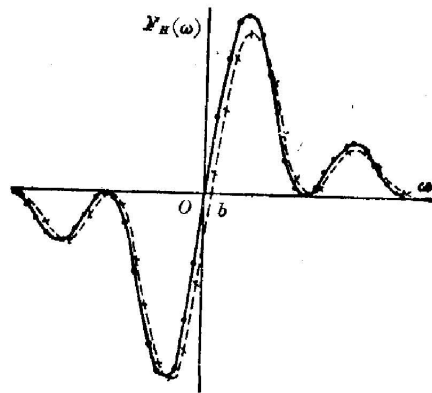


图 4

图 5(a) 是垂直入射平面波经单狭缝和相位跃变光栅后, 在频谱面上形成的一级衍射的光强分布实验照片, 图 5(b) 是图 5(a) 的光强分布  $I(\omega)$  实验曲线。图 5(c) 是相应于实验条件的离散希尔伯特变换曲线。

图 6(a) 是圆孔衍射场的希尔伯特变换光强分布照片。图 6(b) 是图 6(a) 的一维光强分布实验曲线。图 6(c) 是相应于实验条件的离散希尔伯特变换曲线。

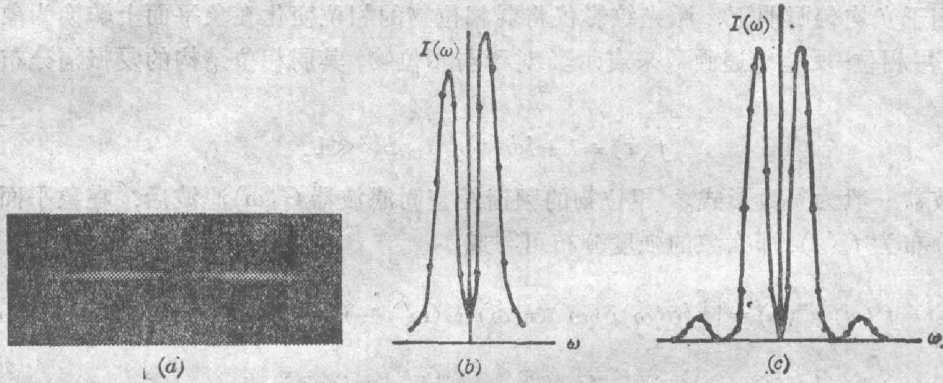


图 5

### 三、离散希尔伯特变换计算

本文的离散希尔伯特变换是采用下述方法计算<sup>[3]</sup>。如原函数  $f(x)$  的离散序列用  $f(i)$  表示, 它的离散希尔伯特变换 (DHT) 序列用  $f_H(k)$  表示。我们采用微处理机按下列表示式进行计算<sup>[4]</sup>:

$$f_H(k) = DHT[f(i)] = \begin{cases} (2/N) \sum_{\text{odd}} f(i) \text{ctg}(\pi/N)(k-i), & (k \text{ 偶数}), \\ (2/N) \sum_{\text{even}} f(i) \text{ctg}(\pi/N)(k-i), & (k \text{ 奇数}). \end{cases} \quad (12)$$

进行计算时, 对于对称分布函数, 以对称点为原点, 先把  $x \geq 0$  的点依次输入, 当  $x \geq N/2$  时, 再把  $x < 0$  的数据点输入, 其次序是从  $-N/2$  朝原点靠近, 最后一个点为靠近原点的最近一个点。采取一定措施, 以减小高频振荡和混叠效应。本文计算了单狭缝衍射、圆孔衍射振幅

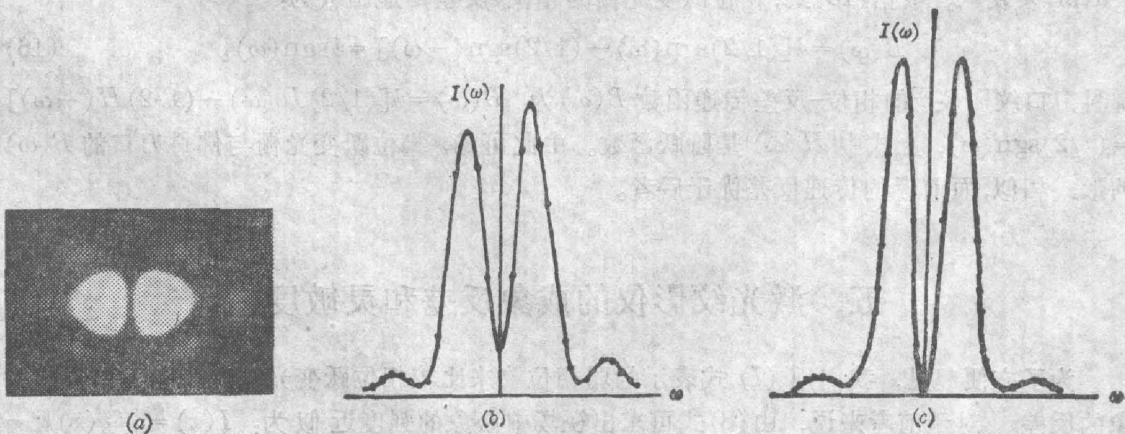


图 6

分布的希尔伯特变换的模的平方(图 5(c), 6(c)), 以及矩形函数的离散希尔伯特变换的模的平方(见图 8(b))。

#### 四、激光纹影仪的相位-反差传递函数

在相干光均匀照明下, 激光纹影仪将弱相位物的相位变化在象平面上转换为象的强度变化, 可用相位-反差传递函数来表示。对于弱相位物, 其弱相位结构的复振幅分布可近似写为:

$$f(x) \doteq 1 + i\phi(x), \quad |\phi|^2 \ll 1。$$

空间滤波器一般为复数形式。相位物的频谱经空间滤波器  $G(\omega)$  滤波后, 在象平面形成象的振幅分布为  $f'(x)$ , 那么象的强度分布可写成:

$$\begin{aligned} I(x) &= f'(x)f'^*(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} \{\delta(\omega)\delta(\omega')G(\omega)G^*(\omega') + \delta(\omega)[-i\Phi^*(\omega')]G(\omega)G^*(\omega') \\ &\quad + \delta(\omega')[i\Phi(\omega)]G(\omega)G^*(\omega')\} \cdot \exp[i(\omega - \omega')x] d\omega d\omega' \\ &= |G(0)|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} [-i\Phi^*(\omega')]G(0)G^*(\omega')\exp(-i\omega'x) d\omega' \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} [i\Phi(\omega)]G^*(0)G(\omega)\exp(i\omega x) d\omega。 \end{aligned} \quad (13)$$

由于  $\phi(x)$  是实函数, 即有:  $\Phi^*(\omega) = \Phi(-\omega)$ , (13) 式便可写成:

$$I(x) = |G(0)|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)B(\omega)\exp(i\omega x) d\omega。 \quad (14)$$

上式中的  $B(\omega)$  称为纹影仪的相位-反差传递函数, 它决定于空间滤波器  $G(\omega)$ , 并由下式表示:

$$B(\omega) = i[G^*(0)G(\omega) - G(0)G^*(-\omega)]。 \quad (15)$$

$B(\omega)$  表征弱相位物的相位调制转换成强度调制的传递特性。

相位跃变光栅的两半部具有相位相差  $\pi$  的作用, 相当于一个移相器, 可由符号函数  $\text{sgn}(\omega)$  来表示。根据 (15) 式, 相位跃变光栅的相位-反差传递函数为:

$$B(\omega) = i[(1/2)\text{sgn}(\omega) - (1/2)\text{sgn}(-\omega)] = i\text{sgn}(\omega)。 \quad (16)$$

佛科刀口纹影仪<sup>[5]</sup>的相位-反差传递函数  $B(\omega)$  为:  $B(\omega) = i[(1/2)H(\omega) - (1/2)H(-\omega)] = (i/2)\text{sgn}(\omega)$ , 上式中  $H(\omega)$  是阶跃函数。由此可见, 相位跃变光栅与佛科刀口的  $B(\omega)$  的形式相似, 而前者的传递反差优于后者。

#### 五、激光纹影仪的成象反差和灵敏度

为了方便起见, 我们用 (7) 式表示的弱相位物来比较相位跃变光栅和佛科刀口形成的象的反差。对于前者来说, 由 (8) 式可求出视场中心象的强度近似为:  $I(x) = |f_H(x)|^2 = a^2 \sin^2 \omega_c x$ , 那么视场中心象的反差为:



$$\gamma = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}) = 1_0 \quad (17)$$

而一维佛科刀口的  $G(\omega)$  为  $G(\omega) = (1/2)[1 + \text{sgn}(\omega)]$ 。那么相位物  $f(x)$  在象平面上的复振幅分布为  $f'(x) = (1/2)[f(x) - if_H(x)]$ 。对于由(7)式表示的弱相位物,在佛科刀口纹影仪中象的强度分布可近似表示为  $I(x) \doteq (1/4)[1 - 2a \sin \omega_0 x]$ 。而象平面上象的反差为:

$$\gamma = 2a_0 \quad (18)$$

由此可见,对于弱相位物,  $a \ll 1$ , 相位跃变光栅纹影仪的反差显然比佛科刀口法大得多。

下面比较前述两种纹影仪检测相位变化的灵敏度。如果令可观察出的最小的象反差为  $\gamma_0$ , 视场内的背景光强度为  $I_0$ , 那么由(8)式可求出相位跃变光栅检测的最小相位变化  $\Delta\phi_0$  (即最小相位振幅  $a$ ) 为  $\Delta\phi_0 = \sqrt{2I_0\gamma_0/(1-\gamma_0)} \doteq \sqrt{2I_0\gamma_0}$ , 而在佛科刀口法中,背景光强度  $I_0=1$ , 因而,由(18)式可看出,它能检测的最小相位变化  $\Delta\phi'_0$  为  $\Delta\phi'_0 = \gamma_0/2$ 。如果取  $\gamma_0 = 2\%$ , 且对相位跃变光栅的  $I_0$  可取  $10^{-4}$ , 那么它的检测相位变化的灵敏度将比佛科刀口法高 5 倍。

### 六、激光纹影仪的应用实验

我们用图 7 所示的装置来观察相位物在象平面上的光强度分布。如果在物平面  $P_1$  上置放一个矩形孔,也就是说,以均匀照明的矩形孔形状的透明空气作为相位物。图 8(a) 是在象平面  $P_3$  上所拍摄的照片。零级光强分布相当于原透明物体的象。(±1) 级的光强分布反映出希尔伯特变换的准微分性质。图 8(b) 是矩形孔的一维离散希尔伯特变换的模的平方曲线  $I(x)$ 。

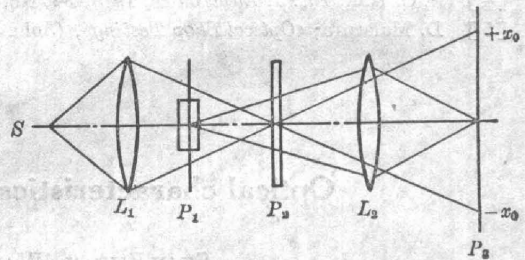


图 7

在集成电路制造过程中,硅片表面平度对成品质量影响很大。图 9 中(a)、(b)是对质量较好的硅片不同部分所拍摄的照片。由图表明,硅片的表面质量还不够理想,说明该方法具有较高的检测灵敏度。

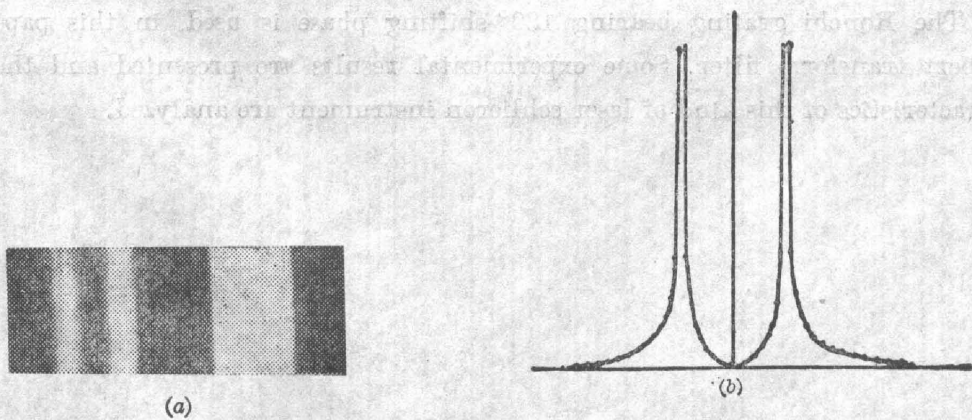


图 8

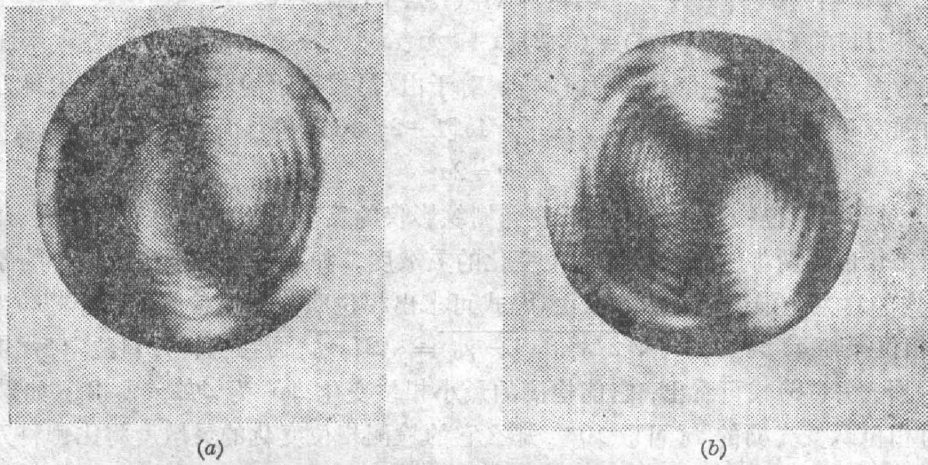


图 9

## 参 考 文 献

- [1] L. M. Soroko; «*Holography and Coherent Optics*», (Plenum Press, New York, 1980), 474.
- [2] Y. Belvaux, J. C. Vareille; *Novv. Rev. d'optique appliquee*, 1971, **2**, No. 3 (May-Jun), 149.
- [3] N. Nakajima, T. Asakura; *Optik*, 1982, **60**, No. 2 (Jan), 181.
- [4] S. C. Kak; *Int. J. Electronics*, 1973, **34**, No. 2 (Feb), 177.
- [5] D. Malacara; «*Optical Shop Testing*», (John Wiley and Sons, New York, 1978), 247.

### Optical characteristics of laser schlieren instrument

SHAN ZIJUAN WANG DINGXING AND LI ZHENZHI

(Department of Physics, Suzhou University)

(Received 12 January 1984; revised 5 April 1984)

#### Abstract

The Ronchi grating bearing  $180^\circ$ -shifting phase is used, in this paper, as a Hilbert transform filter. Some experimental results are presented and the optical characteristics of this kind of laser schlieren instrument are analyzed.