第4卷 第1期 光学学报 Vol. 4, No. 1
1984年1月 ACTA OPTICA SINICA January, 1984

一些轴向梯度折射率介质内的光线微分方程的解

乔亚天
(中国科学院西安光学精密机械研究所)

提 要

本文给出了四种轴向梯度折射率介质内光线微分方程的解析解，并指出轴向梯度介质平板是无光焦度的。

一、前 言

梯度折射率材料的出现，为光学设计提供了提高光学仪器性能的新途径。这些年来光学设计工作者进行了大量的工作，探索光线追迹的新方法[1~5]。众所周知，光线微分方程

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)=\nabla n, \tag{1}$$

确定了全部光线的路径，它代表三对联立二阶标量微分方程，一般情况下得不到解析解，即使采用高速计算机程序来解也是相当费时的。然而，在某些特殊情况下可以得到严格的解析解。利用这种简化了的光线追迹方程有利于校核一般的计算机程序，也有利于描述光线成象特性，指导设计工作。对于径向梯度折射率介质，人们进行了较多的研究，特殊分布的解析解已经得到[6]，但对轴向梯度折射率介质的特殊分布的解析解还未见报道。

二、轴向梯度介质光线方程解的表示

由光线微分方程(1)式写成笛卡尔坐标形式时，注意到轴向梯度是指仅在光轴 z 方向具有折射率梯度，折射率可以写作 $n=n(z)$，于是有：

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right)=0,\quad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right)=0,\quad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right)=\frac{\partial n}{\partial z}。 \tag{2}$$

显然，第一、第二光学方向余弦是常数，记作：$p_0=n\dfrac{dx}{ds}$，$q_0=n\dfrac{dy}{ds}$，第三光学方向余弦为 $l=n\dfrac{dz}{ds}$，三者有关系 $p_0^2+q_0^2+l^2=n^2$，通过这些量间的关系不难得到表示光线位置和方向的一组公式：

$$x=x_0+p_0\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{l},\quad y=y_0+q_0\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{l},\quad l=(n^2-p_0^2-q_0^2)^{\frac{1}{2}}。 \tag{3}$$

收稿日期：1982年9月20日；收到修改稿日期：1983年3月21日

当已知光线的初始坐标 (x_0, y_0, z_0) 和光学方向余弦 (p_0, q_0, l_0) 以及梯度折射率函数 $n(z)$ 时，利用这组公式就可求出任意点处光线的位置和方向。在近轴条件下，即 $l \doteq n(z)$，可得到近轴光线的表示式。

这里，p_0 和 q_0 表示第一、第二光学方向余弦是不变量，当以某两个等折射率面作为平板的前后端面置于均匀介质中时(例如空气)，该平板是无光焦度的，这是与径向梯度介质所不同的；第三光学方向余弦可以写作函数 $l(z)$，是一变量，其值的变化仅意味着光线沿轴传输速度的变化。

三、$n(z)=a+\alpha z$ 分布函数的介质

轴向梯度折射率介质作线性函数分布 $n(z)=a+\alpha z$，当 $z=0$ 时，常数 $a=n(z)|_{z=0}=n_0$，即前表面的折射率，则

$$n(z)=n_0+\alpha z, \tag{4}$$

式中 α 为分布常数。将(4)式代入(3)式之 l，得

$$l=[A+bz+cz^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

其中 $A=n^2(0)-p_0^2-q_0^2$，$b=2\alpha n_0$，$c=\alpha^2$。可以证明

$$\int_{u_0}^{u}\frac{du}{[a+bu+cu^2]^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln(2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2})\Big|_{u_0}^{u}。$$

因此光线位置坐标公式为：

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+p_0\left\{\frac{1}{\alpha}\ln[2\alpha^2z+b+2\alpha\sqrt{A+bz+\alpha^2z^2}]\right\}\Bigg|_{z_0}^{z},\\y&=y_0+q_0\left\{\frac{1}{\alpha}\ln[2\alpha^2z+b+2\alpha\sqrt{A+bz+\alpha^2z^2}]\right\}\Bigg|_{z_0}^{z},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(5)和(6)式即为光线微分方程解析表达式。在近轴条件下，简化为：

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\frac{p_0}{\alpha}\ln\left[\frac{n_0+\alpha z}{n_0+\alpha z_0}\right],\\y&=y_0+\frac{q_0}{\alpha}\ln\left[\frac{n_0+\alpha z}{n_0+\alpha z_0}\right],\\l&=n_0+\alpha z。\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

四、$n^2(z)=a+\alpha z$ 分布函数的介质

仿前，可写出：

$$l=[A+\alpha z]^{1/2}, \tag{8}$$

其中 $A=n_0^2-p_0^2-q_0^2$，分布函数常数项 $a=n_0^2$，由(3)式不难得到光线位置公式：

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\frac{2p_0}{\alpha}[(A+\alpha z)^{1/2}-(A+\alpha z_0)^{1/2}],\\y&=y_0+\frac{2q_0}{\alpha}[(A+\alpha z)^{1/2}-(A+\alpha z_0)^{1/2}]。\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

在近轴条件下，仅将(8)和(9)式中的 A 换成 n_0^2 即可。由于这种分布形式的数学处理简单，

在讨论光学特性时较为方便。

五、$n^2(z)=n_0^2[1-\alpha^2z^2]$分布函数的介质

这种分布介质是用离子交换技术得到的典型分布之一，h_0为坐标原点表面(一般为前表面)的折射率，据函数$n(z)$，可写出

$$l=n_0\alpha[A^2-z^2]^{1/2}, \tag{10}$$

其中$A=l_0/n_0\alpha$，这里应用了关系式$n_0^2=p_0^2+q_0^2+l_0^2$。可以证明

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{[A^2-z^2]^{1/2}}=\arc\sin\left(\frac{z}{A}\right)\Big|_{z_0}^{z}。$$

不难得到光线位置和方向公式：

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\frac{P_0}{n_0\alpha}\arc\sin\left(\frac{z}{A}\right)\Big|_{z_0}^{z},\\ y&=y_0+\frac{q_0}{n_0\alpha}\arc\sin\left(\frac{z}{A}\right)\Big|_{z_0}^{z},\\ l&=[l_0^2-n_0^2\alpha^2z^2]^{1/2}\quad 或\quad l=[l_0^2-n^2(z)-n_0^2]^{1/2}。\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中$A=\dfrac{l_0}{n_0\alpha}$。一般情况下，$z_0=0$，$\arc\sin\left(\dfrac{z_0}{A}\right)=0,\ \pi,\ 2\pi,\ \cdots$，在近轴条件下，得到的公式形式不变，但这时$A=\dfrac{1}{\alpha}$。

六、$n^2(z)=n_0^2[1+\alpha^2z^2]$分布函数的介质

这种分布形似(z_i)，但其解的形式差异尚大，仿前，得

$$l=n_0\alpha[A^2+z^2]^{1/2}, \tag{12}$$

其中$A=\dfrac{l_0}{n_0\alpha}$。可以证明：

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{[A^2+z^2]^{1/2}}=\ln\frac{z+[A^2+z^2]^{1/2}}{z_0+[A^2+z_0^2]^{1/2}}。$$

因此不难得到光线位置公式：

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\frac{P_0}{n_0\alpha}\ln\frac{z+[A^2+z^2]^{1/2}}{z_0+[A^2+z_0^2]^{1/2}},\\ y&=y_0+\frac{q_0}{n_0\alpha}\ln\frac{z+[A^2+z^2]^{1/2}}{z_0+[A^2+z_0^2]^{1/2}},\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中$A=\dfrac{l_0}{n_0\alpha}$。在近轴条件下，公式形式不变，但其中$A=\dfrac{1}{\alpha}$。

本工作曾得到薛鸣球副研究员，陈文斌副教授的帮助，特致谢意。

参　考　文　献

[1] D. T. Moore; *J. O. S. A.*, 1975, **65**, No. 4 (Apr), 451.
[2] L. Montagnino; *J. O. S. A.*, 1968, **58**, No. 12 (Dec), 1667.

[3] E. W. Marchand; *J. O. S. A.*, 1970, **60**, No. 1 (Jan), 1.
[4] Anurag Sharma *et al.*; *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 6 (15 Mar), 984.
[5] E. W. Marchand; *«Gradient Index Optics»*, (Academic, New York, 1978).
[6] E. W. Marchand; *Appl. Opt.*, 1980, **19**, No. 7 (1 Apr), 1044.

The solution of the ray-path differential equation in the axial gradient-index media

QIAO YATIAN
(*Xian Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 20 September 1982, revised 21 March 1983)

Abstract

The exact analytical solution of the differential equation of the ray-paths in four axial gradient-index media is given. It has been indicated that the power for the axial gradient-index media plate is zere.