

计算全息位相补偿法制作全息凹面光栅的设计与实验

范希安 王国权 程慧玲 郭敏贤 金国藩
(铁道部科学研究院) (清华大学)

提 要

本文提出了一种新的方法,用计算全息图作为位相补偿元件,对光学系统中的一束平行光进行调制来制作全息凹面光栅。比较了这一方法的优越性,并提供了设计小象差凹面光栅的一种方案,推导了计算全息图补偿器的数学表达式,设计并制作了6001/mm的III型全息凹面光栅,介绍了实验光路及试验验证结果。

一、引 言

为了克服点光源制作全息光栅方法的不足,本文提出用计算全息图制作全息凹面光栅,这种方法产生的干涉条纹在理论上是不受任何限制的,因此可以最充分地利用光栅表面的刻线分布对各种象差进行平衡。该方法的基本思想是:全息光栅上刻线的形成决定于两束等幅的相干光波相对位相的分布,为了获得光栅刻线的某一预期分布,可以通过改变两束平行光中一束光波的位相来达到。本文采用了干涉型计算全息图对其中一束光波的位相补偿来实现位相调制的,因此称这种方法为位相补偿法。

在光栅刻线分布没有任何限制的情况下设计象差小的凹面光栅,必须对已有的凹面光栅设计理论加以发展。本文在定义凹面光栅特征函数的基础上,从分析刻线函数入手,用最小二乘法推导了在一定使用条件下减少象差的凹面光栅刻线分布的数学表达式。这一方法适用于计算全息位相补偿法制作凹面光栅的设计,而且对机刻光栅的设计也具有参考价值。此外,本文中关于光栅刻线的形状或分布的描述,均指在过光栅顶点的切平面上的投影。

二、凹面光栅的特征函数

凹面光栅在使用中可按照图1建立坐标系。其中, x 轴的指向为过 O 点的法线方向, z 轴方向与 O 点处刻槽的切线方向一致, O 点处的衍射光线与象面 Q 的交点规定为理想象点。 A 点是入缝上一点, P 点是光栅面上任意一点, AP 的衍射光线是 PA'' , AO 的衍射光线是 OA' , B 、 B' 分别是 A 、 A' 点在 xy 平面上的投影。

定义下面的函数为凹面光栅的特征函数:

$$F^* = (AP + PA') - (AO + OA') + k\lambda m(y, z), \quad (1)$$

其中 λ 是衍射波长, k 是衍射级次, $m(y, z)$ 是 P 点到 O 点的刻槽数。特征函数具有如下物理含义: 如果从入缝上一点 A 发出并经过光栅面上任意一点 P 衍射的光线都经过 A' 点, 那么光程 APA' 与 AOA' 之差一定是光波波长的整数倍, 这时特征函数 $F^* \equiv 0$; 反之, 如果 $F^* \neq 0$, 则 AP 的衍射光线将偏离 A' 点形成象差。

特征函数可以展开成如下级数形式:

$$\begin{aligned}
 F^* = & k\lambda m(y, z) + M_{100}y + \frac{1}{2} M_{200}y^2 \\
 & + \frac{1}{2} M_{020}z^2 + \frac{1}{2} M_{300}y^3 \\
 & + \frac{1}{2} M_{120}yz^2 + M_{111}yz \\
 & + \frac{1}{8} M_{400}y^4 + \frac{1}{4} M_{220}y^2z^2 \\
 & + \frac{1}{8} M_{040}z^4 + \dots,
 \end{aligned}
 \quad (2)$$

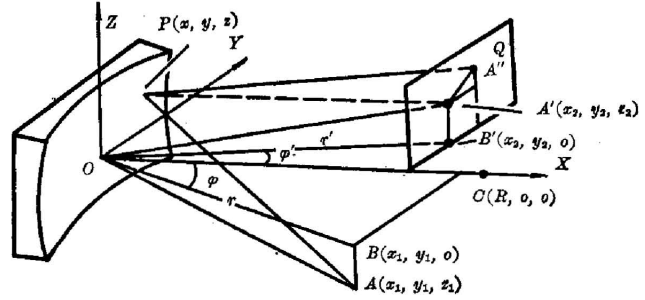


图 1 凹面光栅使用光路示意

Fig. 1 Geometry of a concave grating optical system

上式中系数 M_{ijk} 的角标 i, j, k 分别与变量 y, z, z_1 的指数一样。 M_{ijk} 的表达式为:

$$\left. \begin{aligned}
 M_{100} &= - \left[1 + \left(\frac{z_1}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} (\sin \varphi + \sin \varphi'), \\
 M_{200} &= \left(\frac{\cos^2 \varphi}{r} - \frac{\cos \varphi}{R} \right) + \left(\frac{\cos^2 \varphi'}{r'} - \frac{\cos \varphi'}{R} \right), \\
 M_{020} &= \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos \varphi}{R} \right) + \left(\frac{1}{r'} - \frac{\cos \varphi'}{R} \right), \\
 M_{300} &= \frac{\sin \varphi}{r} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{r} - \frac{\cos \varphi}{R} \right) + \frac{\sin \varphi'}{r'} \left(\frac{\cos^2 \varphi'}{r'} - \frac{\cos \varphi'}{R} \right), \\
 M_{120} &= \frac{\sin \varphi}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos \varphi}{R} \right) + \frac{\sin \varphi'}{r'} \left(\frac{1}{r'} - \frac{\cos \varphi'}{R} \right), \\
 M_{111} &= - \frac{z_1}{r} \left(\frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\sin \varphi'}{r'} \right). \\
 &\vdots
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在大多数光栅装置中, 入缝都垂直并对称于 xy 平面, 为了简化问题, 下面只选择入缝的中点分析。这时可将 $z_1 = 0$ 代入展开式, 并略去第三个角标。考虑到实际光栅的刻槽宽度很小, 如果忽略刻槽的宽度, 把它看作是一条条刻线, 那么处于光栅表面上第 n 条刻线上的点满足: $m(y, z) = n$, 其中 n 取整数。它表示的一族曲线是光栅表面上的刻线在过光栅顶点 O 的切平面上的投影, 反映了光栅刻线的分布。一般来说, 刻线函数 $m(y, z)$ 是任意的, 因此可以设它具有如下形式:

$$\begin{aligned}
 m(y, z) = & \frac{1}{e_0} \left(y + \frac{1}{2} \mu_{20}y^2 + \frac{1}{2} \mu_{02}z^2 + \frac{1}{2} \mu_{30}y^3 + \frac{1}{2} \mu_{12}yz^2 + \frac{1}{8} \mu_{40}y^4 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4} \mu_{22}y^2z^2 + \frac{1}{8} \mu_{04}z^4 + \dots \right),
 \end{aligned}
 \quad (4)$$

其中 μ_{ij} 是常数, e_0 是光栅顶点处刻线的间隔, 通常称作有效光栅常数。把 (4) 式代入 (2) 式, 对主光线应用费马原理, 得到主光线的光栅方程式:

$$\sin \varphi + \sin \varphi' = k\lambda / e_0. \quad (5)$$

综合上述分析,对入缝中点而言,特征函数可以表示为:

$$\begin{aligned} F^* = & \frac{1}{2} F_{20} y^2 + \frac{1}{2} F_{02} z^2 + \frac{1}{2} F_{30} y^3 + \frac{1}{2} F_{12} y z^2 \\ & + \frac{1}{8} F_{40} y^4 + \frac{1}{4} F_{22} y^2 z^2 + \frac{1}{8} F_{04} z^4 + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

其中:

$$F_{ij} = M_{ij} - \mu_{ij} M_{10} \quad (i, j \text{ 取上式对应值}). \quad (7)$$

三、凹面光栅刻线函数的设计

如前所述,凹面光栅理想成象的条件是 $F^* \equiv 0$, 这就要求所有的 F_{ij} 值都等于零。因此(6)式中每一项的存在对应着某种象差的存在。按照几何光学元件象差的分类习惯,常常把(6)式中二次方项叫作象散项,三次方项叫作慧差项,四次方项叫作球差项等等。对应于 $y^i z^j$ 项的消象差条件是:

$$F_{ij} = M_{ij} - \mu_{ij} M_{10} = 0. \quad (8)$$

当入缝位置确定以后,方程(8)就变为

$$f_{ij}(r', \varphi', \mu_{ij}) = 0,$$

其中 μ_{ij} 值可以任意给定。它代表一条曲线,定义这条曲线为 $y^i z^j$ 项的聚焦曲线。在光栅装置中,成象面一般是与子午平面正交的柱面,所以象面的位置可以由象面与子午平面的交线唯一确定,这条交线称为象面曲线,记作

$$r' = g(\varphi'). \quad (9)$$

凹面光栅理想成象的必要条件是使所有的聚焦曲线与象面曲线重合,然而从方程(3)的具体形式来看,无论 μ_{ij} 取什么值,都不可能满足这一要求。为了使所有的聚焦曲线在光栅的使用波段范围内最大限度地接近象面曲线,根据最小二乘法, $y^i z^j$ 项的系数应满足:

$$I_{ij} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{ij}^2 d\varphi' = \text{最小}, \quad (10)$$

其中 φ_1 、 φ_2 分别是使用波段上、下限对应的衍射角。为了满足(10)式,要求:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{ij}}{\partial \mu_{ij}} = & \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} 2F_{ij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial \mu_{ij}} d\varphi' = 0, \\ \therefore \mu_{ij} = & \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{ij} M_{10} d\varphi'}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{10}^2 d\varphi'}. \end{aligned} \quad (11)$$

代入入缝的中点坐标 (r, φ) 及象面曲线方程(9), 求出所有 μ_{ij} 值, 就得到了(5)式所示的刻线函数。光栅的使用条件不同,得到的刻线分布也不同,如果针对不同条件下得到的光栅成象质量进行优选,就可进一步确定光栅的使用参数。评定光栅成象质量的方法可以采用光线追迹法^[1]。

四、计算全息位相补偿法制作全息凹面光栅的设计

图 2 是用点光源的方法制作全息凹面光栅的示意图。调整记录参数 $r_1, \theta_1, r_2, \theta_2$ 可以改变光栅刻线的分布。为了实现前一节叙述的设计方案,记录参数应满足下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta_1 - \sin \theta_2 &= \lambda_0 / e_0, \\ H_{ij}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) &= -(\lambda_0 / e_0) \mu_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中 λ_0 是激光波长, μ_{ij} 由(11)式决定, H_{ij} 的表达式可查阅文献[2]。由方程组(12)可知,四个记录参数最多只能满足三个 μ_{ij} 值的要求,所以不能完全实现光栅刻线的预定分布,这反映了用点光源的方法制作全息凹面光栅的局限性。

用位相补偿法制作全息凹面光栅可以克服点光源方法的不足,实现光栅刻线的预定分布。本文采用了干涉型计算全息图^[3,4]作为位相补偿元件。由于希望得到的波前是位相型的,所以计算全息图的基本方程可表示为:

$$\alpha y - (1/2\pi)W(y, z) = n \quad (n \text{ 取整数}), \quad (13)$$

其中 $W(y, z)$ 是预期波面的位相分布, α 是物波在 y 方向的载频,它可由下式决定:

$$\alpha = 1.5U_y + \frac{\Delta}{\lambda_0 f}, \quad (14)$$

这里 U_y 是物波在 y 方向的带宽, λ_0 是激光波长, f 是傅里叶透镜的焦距, Δ 是计算全息图的一级衍射与高级衍射在频谱面上分开的距离。

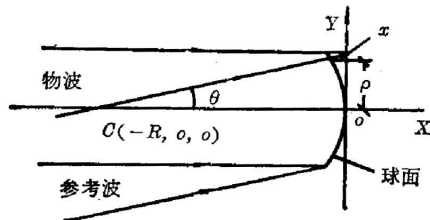


图 3 计算全息位相补偿法制作凹面光栅光路原理

Fig. 3 Schematic diagram of the fabricating concave grating using a CGH compensator

图 3 画出了制作凹面光栅时两束光波和球面毛坯的相对位置。物波是来自计算全息图的一级衍射波,传播方向与 x 轴一致,参考波是垂直于 z 轴、与 x 轴成 θ 角传播的平面波,它可以表示为:

$$\exp(i\varphi_R) = \exp[ik(y \sin \theta + x \cos \theta)], \quad (15)$$

其中 $k = 2\pi/\lambda_0$ 。设物波在球面上的位相为 $\varphi_0(y, z)$,物波和参考波互相干涉,光强为 $I(y, z) = 2 + 2 \cos(\varphi_0 - \varphi_R)$ 。如果在光强极大处形成光栅的刻线,那么刻线的分布满足:

$$\varphi_0 - \varphi_R = \pm 2n\pi \quad (n \text{ 取整数}). \quad (16)$$

设需要形成的刻线分布为:

$$m(y, z) = n \quad (n \text{ 取整数}). \quad (17)$$

由(16)、(17)式可得:

$$\varphi_0 = \varphi_R \pm 2\pi m(yz), \quad (18)$$

上式中正负号的选择是任意的,下面只取负号分析。注意到(18)式给出了物波在球面上的位相应满足的要求,在球面的相对孔径不大或物波的空间频率不高的情况下,物波从球面到

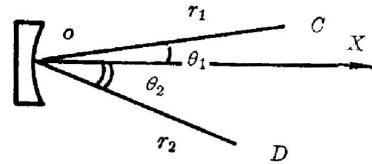


图 2 点光源制作凹面光栅光路
Fig. 2 Two point sources recording system for concave holographic grating

yz 平面的位相差可以用 kx 很好近似, 这样, 物波在 yz 平面上的位相应满足:

$$W(y, z) = \varphi_R - kx - 2\pi m(y, z), \quad (19)$$

上式中:

$$x = -R + \sqrt{R^2 - \rho^2}; \quad \rho^2 = y^2 + z^2.$$

把(4)式代入(19)式, 并用台劳级数展开:

$$W(y, z) = 2\pi \left[\frac{1}{2} B_{20} y^2 + \frac{1}{2} B_{02} z^2 + \frac{1}{2} B_{30} y^3 + \frac{1}{2} B_{12} yz^2 + \frac{1}{8} B_{40} y^4 + \frac{1}{4} B_{22} y^2 z^2 + \frac{1}{8} B_{04} z^4 + \dots \right], \quad (20)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} B_{20} &= \frac{1 - \cos \theta}{\lambda_0 R} - N_0 \mu_{20}, & B_{30} &= -N_0 \mu_{30}, \\ B_{02} &= \frac{1 - \cos \theta}{\lambda_0 R} - N_0 \mu_{02}, & B_{12} &= -N_0 \mu_{12}, \\ B_{40} &= \frac{1 - \cos \theta}{\lambda_0 R^3} - N_0 \mu_{40}, & B_{22} &= \frac{1 - \cos \theta}{\lambda_0 R^3} - N_0 \mu_{22}, \\ & \vdots & & \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

上式中 $N_0 = (1/e_0)$ 。平面参考波倾角由 $\theta = \sin^{-1}(\lambda_0 N_0)$ 式决定。略去高阶项的影响, 物波在 y 方向空间频率可表示为:

$$\nu_y = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial W(y, z)}{\partial y} = B_{20} y + \frac{3}{2} B_{30} y^2 + \frac{1}{2} B_{12} z^2. \quad (22)$$

设矩形毛坯在 y 方向和 z 方向的域为 $[-a, a]$ 、 $[-b, b]$, 当物波函数的系数满足 $B_{20} \gg B_{30}$ 时, 由(22)式得物波在 y 方向的带宽:

$$U_y = 2 |B_{20}| a + \frac{1}{2} |B_{12}| b. \quad (23)$$

五、用计算全息位相补偿法制作 III 型光栅

这里提到的 III 型光栅主要取自法国 Jobin-Yvon 公司对全息凹面光栅产品的分类。

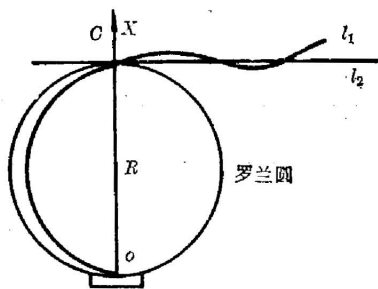


图 4 III 型光栅聚焦曲线

Fig. 4 Focal curve of a type

III concave grating

图 4 画出了 III 型光栅成像的主要特点, l_1 、 l_2 分别是 y^2 项 yOz^2 项的聚焦曲线, 它们在较宽的范围内彼此接近, 说明 III 型光栅可以在较宽的波段上修正象散。本文在考虑到实验条件的情况下, 提出的设计要求为: 刻线密度 600 1/mm, 波长范围 3600 Å ~ 7200 Å, 衍射级次 +1, 曲率半径 224.4 mm, 刻划面积 $2a \times 2b = 24.6 \times 30$ (mm²), 入缝中点坐标 $(r, \varphi) = (R, 0)$, 象面曲线 $r' = R/\cos \varphi'$, 激光波长 4880 Å, 傅里叶透镜焦距 308 mm, 平面参考波倾角 $\theta = \sin^{-1}(\lambda_0 N_0) = 17.02566^\circ$ 。

通过用(11)式求出 μ_{ij} 值再代入(21)式得到

$B_{20} = -0.467881$, $B_{02} = 0.400214$, $B_{30} = -1.28348 \times 10^{-3}$, $B_{12} = 0$, $B_{40} = -1.7172 \times 10^{-6}$, $B_{22} = B_{04} = 7.9478 \times 10^{-6}$ 。由于 $B_{20} \gg B_{02}$, 所以, 可运用(14)式和(23)式计算载频, 在计算

时取 $\lambda=0.5\text{ mm}$, $\alpha=20.59\text{ l/mm}$, 实取 $\alpha=21\text{ l/mm}$ 。由此得到计算全息图基本方程式为:

$$21y + 0.233941y^2 - 0.200107z^2 + 6.417 \times 10^{-4}y^3 + 2.147 \times 10^7y^4 - 1.987 \times 10^{-6}y^2z^2 - 9.935 \times 10^{-7}z^4 = n, \quad (24)$$

其中: $-270 \leq n \leq 295$ 。在 n 的取值范围内, 用计算机对方程(24)求解, 并控制绘图机放大画出 566 条线来, 然后用光学缩版的方法恢复到原来的尺寸, 就得到了所需要的计算全息图。为了提高全息图的衍射效率, 每一条线要画两遍, 后一遍画笔在 y 方向移动一个适当的距离, 以使黑白线条宽度相等。

制作 III 型光栅的实验是在上海光学仪器研究所光栅室进行的, 光路安排如图 5 所示。氦离子激光器发出的光束经过扩束准直以后, 由透反镜 BS 分成两路, 取一路照明计算全息图(C. G. H.), 计算全息图的衍射波经过双傅里叶系统处理, 选出一级衍射照明毛坯, 另外

一路平行光经过 M_3, M_4, M_5 反射, 以 θ 角入射到球面毛坯上, 涂在毛坯上的感光胶记录下干涉条纹, 就得到了 III 型光栅。图 6 是计算全息图的频谱照片。

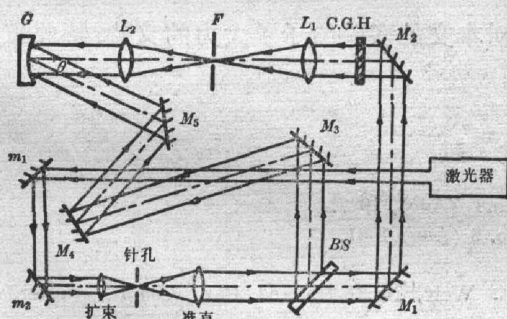


图 5 制作 III 型光栅实验光路

Fig. 5 Arrangement of the optical system for fabricating type III concave grating by CGH method

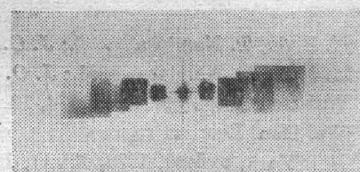


图 6 计算全息图衍射频谱
Fig. 6 Spatial frequency spectrum of the diffracted waves from CGH

六、实验结果验证

用图 7 所示的光路验证实验制备的光栅的成象特性, 在图中, 透镜把激光束会聚在凹面光栅的球心上, 对于实验制备的光栅和 I 型光栅分别在 B_1 和 B_2 点上获得 A 点的象。实验证实, I 型光栅在罗兰圆上成象, 其垂直象散很大, 而实验制备的光栅在平面 $r' = R/\cos \varphi'$ 上

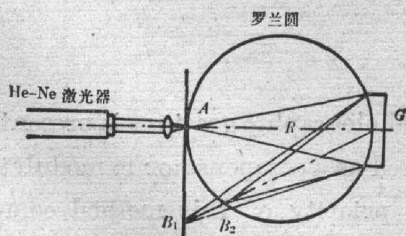


图 7 III 型光栅验证光路

Fig. 7 Optical system for verifying the CGH type III concave grating

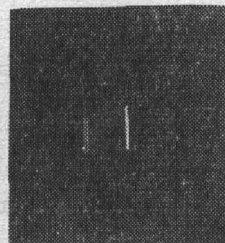


图 8 低压汞灯谱线(左端两条为 5790 \AA , 5770 \AA)
Fig. 8 Spectral lines diffracted by the grating of a low pressure mercury lamp (The left double line are 5790 \AA and 5770 \AA)

成象,在垂直方向上能够很好聚焦。这说明我们实验制作的光栅确实具备了 III 型光栅的成象特性。

为了考察实验制作的光栅的分辨本领,用图 7 的光路拍摄了低压汞灯光谱,如图 8 所示。其中 5770 \AA 和 5790 \AA 两条谱线能够清晰地分开。拍谱时,入缝高度为 5 mm ,缝宽为 0.05 mm 。

在 $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ 时,测定实验制作的光栅的相对衍射效率为 33% 。测量图 8 中谱线间距离,用光栅方程式算出光栅的刻线密度为 $5941/\text{mm}$ 。

用计算全息位相补偿法制作全息凹面光栅是一项新的工作,本文叙述的设计原理与实验方法还只是初步的尝试,然而上述实验结果已经表明,这种方法不仅在理论上是正确的,而且在工艺上也是可行的。本文的分析,系对球面光栅而言,但所得到的结论也易于推广到一般非球面光栅中去。

上海光学仪器研究所王国华、吴菊秋等同志对本文的实验给予了大力的支持,特此致以深切的谢意。

参 考 文 献

- [1] H. Noda, T. Namioka, *et al.*; *J. O. S. A.*, 1974, **64**, No.8 (Aug), 1037.
- [2] H. Noda, T. Namioka, *et al.*; *J. O. S. A.*, 1974, **64**, No. 8 (Aug) 1031.
- [3] Wai-Hon Lee; *Appl. Opt.*, 1974, **13**, No. 7 (Jul) 1677.
- [4] Wai-Hon Lee; «Progress in Optics», (edited by E. Wolf, North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, New York, Oxford, 1978, XVI), 119.

Design and experiment of the concave holographic gratings fabricated by computer-generated hologram

FAN XIAN AND WANG GUOQUAN
(China Academy of Railway Sciences)

CHENG HUILING WU MINSHIAN AND JIN GUOFAN
(Tsing Hua University, Beijing)

(Received 9 February 1983)

Abstract

In this paper a new method to fabricate concave holographic gratings is presented in which a computer-generated hologram (CGH) is used as a compensator to modulate one of the collimated beams in the optical system. The priority of this method compared with the traditional one is discussed. The arithmetic expressions for designing such a CGH compensator have been derived. Using this compensator, a $6001/\text{mm}$ concave holographic grating has been fabricated. The optical system and experimental results are also presented.