

模式结构的图象重建

章泽民

(中国科学院等离子体研究所)

提 要

本文运用模式结构分析方法得到 $m=0, 1, 2, 3$ 模的重建系数表。对这些系数表检验的结果是令人满意的。使用所介绍的系数表可以使具有模结构的二维图象重建工作得以简化并易于实现。

一、前 言

圆柱对称的图象重建(也称为阿贝尔变换),已应用在许多方面。这一问题的数值计算方法已由 W. L. Barr^[1]介绍过。但是更多的实际问题是非圆柱对称的。一般来说,非圆柱对称的二维图象重建工作是较复杂的,需要大量的投影信息和占用较多的计算机机时。在高温等离子体诊断工作中,由于客观条件的限制,不可能在同一时刻获得大量的投影值,也不能忍受为此花费大量的计算时间,而使诊断工作陷入大量的计算之中。但是无论是非圆截面的磁约束装置或是磁流体模(MHD模)^[2],都使得装置中被约束的等离子体的电子温度,电子密度以及 X 射线和真空紫外辐射率等具有某种模式形态的分布,而这些模结构的重建问题是可以被简化的。在对接收到的原图象投影信号组作空间傅里叶分析后,主要成分或者所关心的只是某个或某几个模的成分,分别称它们为单模或耦合模结构。这就使所要解决的二维图象重建问题化为提取某个或若干个模的投影信号,然后对各个模作还原^[3]。这种方法就称为模结构图象重建法。

在以下的讨论中,不考虑模随时间的演变问题,只讨论瞬间的模结构。所以各变量都不包含时间变量。但是只要我们按时间顺序作一系列的图象重建,获得不同时刻的模结构,也就得到模的演变。

为了计算简便及克服变换公式中一些高阶模在原点附近处出现的发散问题,本文给出了 $m=0, 1, 2, 3$ 模的重建系数表,有效地克服了发散。这些表是采用曲线拟合方法得出的,使计算结果光滑以消除偶然误差。运用所介绍的系数表可以使原来要用计算机做有一定计算量和难度的工作,化为按照表来索取系数,作简单的相乘相加运算就可以得到结果。这在高温等离子体诊断工作中,对于需要处理大量的图象重建问题所具有的意义更为显著。

最后对所介绍的方法和系数表做了检验,结果是令人满意的。

二、投影值的谐波分析

在极坐标系 (r, θ) 中,设等离子体单位体积的发光率为 $f(r, \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r < \infty$,

沿着 l 线投影在 r' 线上 (r' 线与 x 轴夹角为 ϕ), 强度为 $I(r', \phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq r' < \infty$ 。如果认为等离子体自身是光学薄且各向同性的 (此假设与实际情况相符), 就有

$$I(r', \phi) = 2 \int_{r=r'}^{\infty} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r'^2}} f(r, \theta). \quad (1)$$

参见图 1 所示的投影关系。

对投影值作谐波分析, 得到

$$I(r', \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} I_{m,c}(r') \cos(m\phi) + \sum_{m=1}^{\infty} I_{m,s}(r') \sin(m\phi), \quad (2)$$

其中 $I_{m,c}$ 和 $I_{m,s}$ 分别为

$$I_0(r') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(r', \phi) d\phi \quad (m=0),$$

$$\left. \begin{aligned} I_{m,c}(r') &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I(r', \phi) \cos(m\phi) d\phi \quad (m \geq 1), \\ I_{m,s}(r') &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I(r', \phi) \sin(m\phi) d\phi \quad (m \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

用 (3) 式可以从投影信息 $I(r', \phi)$ 中提取所需的模成分 $I_m(r')$ 。在实际使用中, 投影值是离散的, 观察范围是有限的。若 $[0, 2\pi]$ 分为 A 个等距点, $[0, R]$ 范围内分为 N 个等距点, 有

$$\left. \begin{aligned} I_0(n) &= \frac{1}{A} \sum_{a=0}^A I(n, a) \quad (m=0), \\ I_{m,c}(n) &= \frac{2}{A} \sum_{a=0}^A I(n, a) \cos \left[ma \left(\frac{2\pi}{A} \right) \right] \quad (m \geq 1), \\ I_{m,s}(n) &= \frac{2}{A} \sum_{a=0}^A I(n, a) \sin \left[ma \left(\frac{2\pi}{A} \right) \right] \quad (m \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

三、模结构的重建公式

对源函数 $f(r, \theta)$ 也作傅里叶级数展开,

$$f(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{m,c}(r) \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_{m,s}(r) \sin(m\theta). \quad (5)$$

将 (2)、(3) 式和 (5) 式代入 (1) 式, 并有以下关系,

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \phi - \cos^{-1} \left(\frac{r'}{r} \right) \quad (\phi \geq \theta), \\ \theta &= \phi + \cos^{-1} \left(\frac{r'}{r} \right) \quad (\phi < \theta). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

根据三角级数的正交性得到各阶模的对应关系,

$$\left. \begin{aligned} I_{m,c}(r') &= 2 \int_{r=r'}^{\infty} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r'^2}} f_{m,c}(r) \cos m \left[\cos^{-1} \left(\frac{r'}{r} \right) \right] \quad (m \geq 0), \\ I_{m,s}(r') &= 2 \int_{r=r'}^{\infty} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r'^2}} f_{m,s}(r) \cos m \left[\cos^{-1} \left(\frac{r'}{r} \right) \right] \quad (m \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

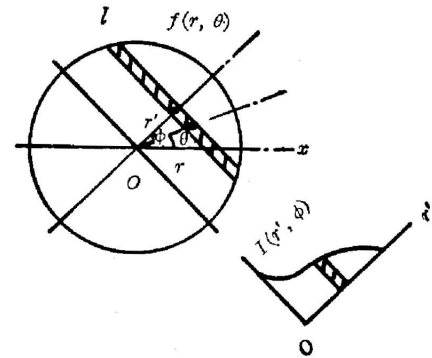


图 1 投影关系示意图

Fig. 1 Diagram of the projection relationship

上式可以统一写成:

$$I_m(r') = 2 \int_{r=r'}^{\infty} \frac{r dr}{\sqrt{r'^2 - r^2}} f_m(r) T_m\left(\frac{r'}{r}\right), \quad (8)$$

式中 $T_m\left(\frac{r'}{r}\right)$ 项表示 $\cos m\left[\cos^{-1}\left(\frac{r'}{r}\right)\right]$, 就是切比雪夫多项式。

要解 (8) 式的积分方程, 可以作阿贝尔变换。对 (8) 式两边同乘以

$$\int_u^{\infty} \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 - u^2}} P_m\left(\frac{r'}{u}\right),$$

其中 $P_m\left(\frac{r'}{u}\right)$ 是特殊函数, $P_0=1$, $P_1=\frac{u}{r'}$, $P_2=1$, $P_3=\frac{u}{r'} - \frac{4}{3} \frac{r'}{u}$ 。

通过交换积分次序, 整理后得到 $m=0, 1, 2, 3$ 的积分方程解

$$f_0(r) = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \int_{r'=r}^{\infty} \frac{I_0(r') r' dr'}{\sqrt{r'^2 - r^2}}, \quad (9)$$

$$f_1(r) = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dr} \int_{r'=r}^{\infty} \frac{I_1(r') dr'}{\sqrt{r'^2 - r^2}}, \quad (10)$$

$$f_2(r) = -\frac{1}{\pi} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \int_{r'=r}^{\infty} \frac{I_2(r') r' dr'}{\sqrt{r'^2 - r^2}}, \quad (11)$$

$$f_3(r) = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{d}{dr} \int_{r'=r}^{\infty} \frac{I_3(r') \left(1 - \frac{4}{3} \frac{r'^2}{r^2}\right) dr'}{\sqrt{r'^2 - r^2}}. \quad (12)$$

上四式中 f_0, I_0, f_1, I_1 分别表示 $f_{0,c}, I_{0,c}, f_{1,c}, I_{1,c}$, 或者表示 $f_{1,s}, I_{1,s}$; 其余类同。

四、 $m=0, 1, 2, 3$ 模的重建系数表

(9)~(12) 式分别给出 $m=0, 1, 2, 3$ 模的变换公式。这些公式在具体计算时, 特别是在大量处理图象重建时, 仍需一定的计算量, 还需要考虑对数据的光滑和克服原点处发散等问题^[3]。因此编制了以下的系数表, 把 (9)~(12) 式中的积分求导化成有限项的求和式, 克服了发散, 并预先把数据光滑等处理方法考虑进去。

$m=0, 1, 2, 3$ 模的重建系数表是分别计算的, 但基本方法是一致的。(a) 把半径 R 分为 20 等分, 即 $k=20, N=20$ 。空间分辨率相当于把一幅图分成 20 个同心圆。这对于等离子体诊断中的一般要求是足够了。如果不需要分得那么细, 可以顺取表中的方阵。(b) 用二次曲线 $I = a_n + b_n x^2$ 拟合离散值 $I_m(n)$, 计算出积分 $\int_r^{\infty} \frac{I_m(r') g_m(r') dr'}{\sqrt{r'^2 - r^2}}$ 值 $F_k = \sum_{n=k}^N A_{kn} I_{n0}$ 。(c) 用四次曲线 $F = c_k + d_k y^2 + e_k y^4$ 五点拟合积分值 F_k , 并求导。(d) 为了防止较高阶模的变换公式在原点附近处发散, 采取赋零值方法, 这与实际模结构是相符的。因为原点处的值为单值且与角度无关, 因此不属于高阶模。(9)~(12) 式就合写为

$$\left. \begin{aligned} f'_m(k) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=k-2}^{20} B_m(k, n) I_m(n) \quad (k > 2), \\ f'_m(k) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{20} B_m(k, n) I_m(n) \quad (2 \geq k \geq 0), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

表 1 $m=0$ $B_0(n, k) \times 10^4$
Table 1 The reconstruction coefficient table of $m=0$ mode

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	2029	1831	1239																			
1	4439	4041	2847	1324																		
2	1791	1778	1740	1936	1172																	
3	-5111	-4342	-2034	928	1523	1036																
4	-1298	-1299	-1304	-964	722	1291	930															
5	-95	-204	-531	-968	-538	635	1140	847														
6	-237	-262	-338	-500	-810	-330	586	1032	781													
7	-193	-203	-235	-292	-464	-714	-214	551	951	727												
8	-152	-157	-173	-202	-260	-431	-646	-142	524	886	682											
9	-122	-125	-134	-150	-179	-236	-403	-595	-95	501	834	644										
10	-99	-101	-107	-116	-133	-162	-217	-379	-555	-63	482	790	612									
11	-83	-84	-87	-93	-104	-120	-148	-202	-359	-522	-39	465	752	583								
12	-69	-70	-73	-77	-84	-94	-111	-138	-189	-341	-495	-22	450	720	558							
13	-59	-60	-61	-64	-69	-76	-87	-103	-129	-179	-326	-471	-9	436	691	536						
14	-51	-52	-53	-55	-58	-63	-70	-80	-96	-122	-170	-313	-450	1	424	666	517					
15	-45	-45	-46	-47	-50	-53	-58	-65	-75	-91	-115	-162	-301	-432	9	413	643	499				
16	-39	-39	-40	-41	-43	-46	-49	-54	-61	-71	-86	-110	-155	-290	-416	15	402	623	483			
17	-35	-35	-35	-37	-38	-40	-42	-46	-51	-58	-67	-82	-105	-149	-280	-402	20	393	604	468		
18	-31	-31	-32	-32	-33	-35	-37	-40	-43	-48	-55	-64	-78	-101	-144	-271	-389	24	384	587	455	
19	-28	-28	-28	-29	-30	-31	-33	-35	-37	-41	-46	-52	-61	-75	-97	-139	-263	-377	28	375	571	
20	-25	-25	-25	-26	-27	-28	-29	-31	-33	-35	-39	-44	-50	-59	-72	-94	-135	-256	-367	30	367	

表 2 $m=1$ $B_1(n, k) \times 10^4$
Table 2 The reconstruction coefficient table of $m=1$ mode

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0																						
1		2728	4403	3973																		
2		1714	2869	2903	2344																	
3		78	329	928	2031	1727																
4		-1027	-1464	-723	722	1614	1395															
5		-163	-349	-581	-431	635	1368	1186														
6		2	-60	-250	-540	-275	586	1204	1041													
7		-23	-60	-125	-265	-510	-183	551	1087	935												
8		-18	-42	-76	-130	-270	-485	-125	524	997	853											
9		-13	-29	-50	-79	-131	-269	-463	-85	501	927	787										
10		-10	-21	-35	-53	-81	-130	-266	-444	-56	482	869	734									
11		-7	-16	-25	-38	-55	-81	-128	-261	-427	-36	465	821	639								
12		-6	-12	-19	-28	-39	-55	-80	-126	-256	-412	-20	450	730	651							
13		-5	-9	-15	-21	-29	-40	-55	-79	-124	-251	-398	-8	436	744	619						
14		-4	-8	-12	-17	-23	-30	-40	-55	-78	-121	-246	-386	1	424	713	590					
15		-3	-6	-9	-13	-18	-23	-30	-40	-54	-77	-119	-240	-375	8	413	686	565				
16		-2	-5	-8	-11	-14	-19	-24	-31	-40	-54	-76	-116	-235	364	14	402	661	543			
17		-2	-4	-6	-9	-12	-15	-19	-24	-31	-40	-53	-74	-114	231	355	19	398	639	523		
18		-2	-3	-5	-7	-10	-12	-15	-19	-24	-30	-39	-52	-73	112	226	346	23	384	619	505	
19		-1	-3	-5	-6	-8	-10	-13	-16	-20	-24	-30	-39	-51	72	110	222	338	26	375	601	
20		-1	-3	-4	-5	-7	-9	-11	-13	-16	-20	-24	-30	-38	51	70	108	217	330	29	367	

表 3 $m=2$ $B_2(\pi, k) \times 10^3$
Table 3 The reconstruction coefficient table of $m=2$ mode

$\frac{k}{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1929	449	136																	
2	3204	766	273	114																
3	2704	692	339	205	99															
4	1231	381	311	235	168	88														
5	1879	466	200	200	182	144	80													
6	2062	504	201	99	143	149	128	74												
7	2006	499	216	102	51	110	127	115	69											
8	2001	499	219	118	57	26	88	112	106	65										
9	1999	499	220	121	72	33	10	73	100	98	61									
10	1998	499	221	123	76	48	18	1	62	91	92	58								
11	1999	500	222	124	78	51	33	9	-6	54	83	87	56							
12	1998	499	222	124	79	53	36	23	2	-10	48	77	82	53						
13	1997	499	222	124	79	54	38	27	16	-2	-13	43	72	78	51					
14	1996	499	222	124	79	54	39	28	20	12	-5	-16	39	68	75	50				
15	2000	500	222	125	79	55	40	29	22	15	8	-7	-18	35	65	72	48			
16	1999	500	222	125	80	55	40	30	23	17	12	5	-9	-19	32	61	69	46		
17	1997	499	222	125	80	55	40	30	24	18	13	9	3	-10	-20	30	59	67	45	
18	2000	500	222	125	80	55	40	31	24	19	14	11	7	2	-11	-20	28	56	65	44
19	1999	500	222	125	80	55	40	31	24	19	15	12	9	5	1	-12	-21	26	54	63
20	1996	499	222	125	80	55	40	31	24	19	15	12	10	7	4	0	-13	-21	24	52

表 4 $m=3$ $B_3(n, k) \times 10^3$
Table 4 The reconstruction coefficient table of $m=3$ mode

$\begin{matrix} k \\ m \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	676	1092	985																	
2	1834	2978	2741	405																
3	2735	4472	4213	983	255															
4	3481	5715	5456	1253	522	189														
5	4375	7160	6767	1455	639	356	152													
6	5273	8625	8132	1697	681	407	270	129												
7	6148	10058	9492	1987	746	405	293	219	112											
8	7026	11495	10849	2278	858	414	274	228	185	100										
9	7904	12932	12206	2564	974	471	260	201	186	161	91									
10	8783	14369	13562	2849	1084	532	294	176	156	157	143	84								
11	9661	15806	14919	3135	1193	587	333	199	125	126	136	129	78							
12	10539	17242	16275	3420	1302	642	366	227	142	92	105	121	118	73						
13	11417	18679	17631	3705	1410	695	397	243	164	106	69	89	109	109	69					
14	12296	20117	18988	3990	1519	749	428	268	179	124	80	53	78	99	102	65				
15	13174	21553	20344	4275	1627	803	459	288	193	135	96	63	40	68	91	96	62			
16	14052	22990	21700	4560	1736	856	490	308	206	145	105	76	49	31	61	85	90	59		
17	14930	24427	23056	4845	1844	910	520	327	220	155	113	84	62	39	23	55	79	86	57	
18	15808	25864	24412	5130	1953	964	551	346	233	164	120	90	68	51	31	18	50	74	82	54
19	16687	27301	25769	5415	2061	1017	582	366	246	173	127	96	73	57	43	25	13	45	70	78
20	17565	28737	27125	5700	2170	1071	612	385	259	183	134	101	78	61	48	36	20	9	42	67

式中 f'_m 是还原后得到的模函数, $B_m(k, n)$ 是系数表中 m 模的 k 列 n 行系数, 具体值参见表 1~4。其中 $B_0(k, n)$ 与 Barr^[1] 所发表的数据基本是一致的, 这是因为 $m=0$ 模的结构就是圆柱对称的, 但是因为计算时所取精度不同, 个别数值略有差异。(13) 式中 $I_m(n)$ 是采用 (4) 式提取的单模投影值。

使用表 1~4 中数值时需注意, 为了整齐起见, 表中的数均已放大过, 放大系数在各表上方注明。表中空白处均为零值。

五、检验结果

表 1~4 中所列的值都用几种假设的径向分布检验过(见图 2)。各分图中, 上面是投影值的径向分布; 下图中实线表示假设的发光率的径向分布, 虚线表示用本文介绍的系数表所还原的结果。

首先用 (8) 式, 从所假设的单模发光率径向分布函数 $f_m(r)$ 得到投影值 $I_m(n)$ 。然后用重建系数 B_m 把所得的积分值 $I_m(n)$ 还原成发光率径向分布的重建值 $f'_m(k)$ 。

从图 2 中可以看到, 除了较高阶模在原点附近处略有振荡外, 结果是令人满意的。振荡的直接原因是与变换公式有关, 但对等离子体诊断的影响不大。这是因为振荡幅度不大, 并且高阶模不出现在原点附近。

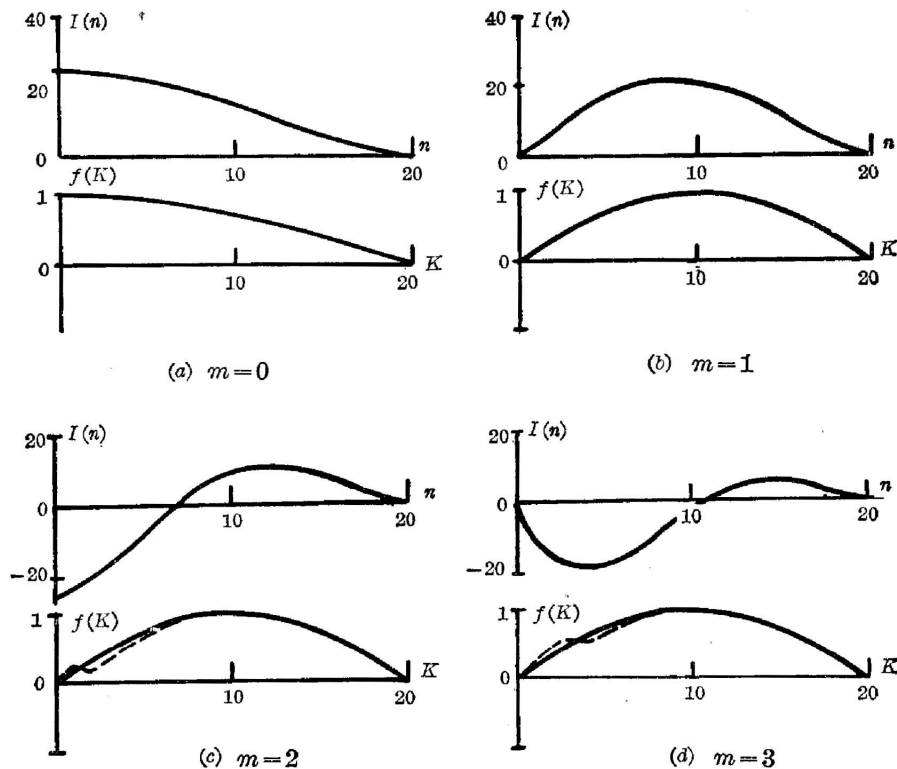


图 2 模的检查结果

Fig. 2 The results of examining reconstruction coefficient

六、单模与耦合模图象

为了进一步说明模结构图象重建工作的性质, 分别用图 2 中所给出的源分布函数作了三种单模图象以及它们的耦合模图象(见图 3)。图 3 中, 分图 (a), (b), (c) 分别是 $m=1$, $m=2$, $m=3$ 单模结构图; 分图 (d) 是 $m=1, 2, 3$ 叠加的耦合模结构图。

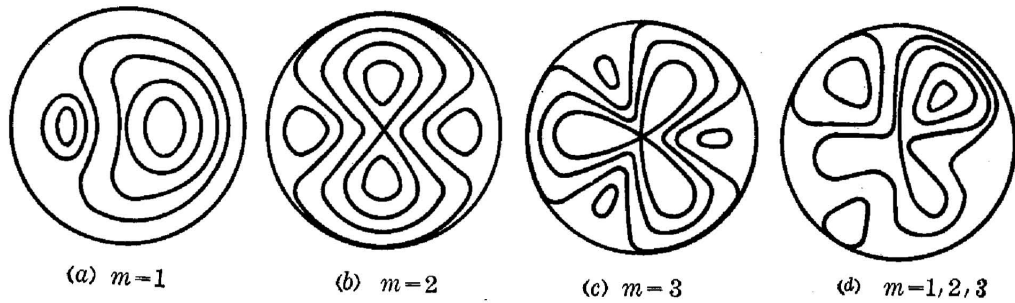


图 3 三种单模和耦合模图象

Fig. 3 The images of (a) $m=1$, (b) $m=2$, (c) $m=3$ single modes and (d) $m=1, 2, 3$ coupled mode

从图中可以看到各个单模结构图都呈现出所对应阶数的对称性, 但从分图 (d) 中则发现模的耦合使对称性消失了, 组成比较复杂的图形。由此说明模式结构分析方法和所列出的系数表不仅可以运用于各种高阶对称性的图形, 也可以运用于非对称的图形, 只是需要考虑几种模的耦合。由此可见这种方法所适用的范围还是很广泛的。

参 考 文 献

- [1] W. L. Barr; *J. Opt. Soc. Amer.*, 1962, **52**, No. 8 (Aug), 885.
- [2] N. R. Sauthoff, *et al.*; *PPPL-1379*, 1978.
- [3] N. R. Sauthoff, S. von Goeler; *IEEE trans. Plasma Sci.*, 1979, **PS-7**, No. 3 (May), 141.

The image reconstruction of the mode structure

ZHANG ZEMIN

(Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hefei)

(Received 20 April 1983)

Abstract

This paper introduces four tables of reconstruction coefficients of $m=0, 1, 2$, and 3 modes, which are obtained by applying the mode structure analysis method. These coefficients are verified to be satisfactory. These tables can be used to simplify and realize easily the reconstruction of two-dimension images with mode structures.