第4卷 第1期 光 学 学 报 Vol. 4, No. 1
1984年1月 ACTA OPTICA SINICA January, 1984

光束在缓变折射率介质中的传输

邓锡铭 林伟平
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

利用流体模型方法，建立了描写光束在缓变折射率介质中的传输方程。

一、引 言

利用流体模型方法[1~3]，可以描写光束在真空中的稳态传输过程。但普遍讨论光束在非均匀介质中的传输仍是一件复杂、困难的事情。这不仅由于介质折射率的不均匀而难以直接计算衍射积分，而且还会遇到光束连续发生的费涅尔反射，在这种情况下，企图普遍地和精确地描写光束的传输是十分困难的。故本文只限于讨论在各向同性的、折射率梯度比较小的，无衰减无增益的非均匀介质中，如何运用流体模型方法描写光束在这类介质中的稳态传输过程。

当强激光束通过均匀介质时，由于介质的非线性折射率不可忽略，一般会形成一介缓变的折射率分布。因此，即使是采用近似模型来讨论这个问题也是有实际价值的。

二、作用于场流体的外力和内力

用流体模型方法描写稳态光束传输，首先要求光束满足达朗贝尔(d'Alembert)方程。但遇到非均匀介质，一般不满足这个方程。对于磁导率 $\mu=1$ 的各向同性介质，若折射率 n 是一个空间坐标的函数，则介质中的电磁场方程可表示为[4]：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{n^2}{c^2}\ddot{\boldsymbol{E}}+\nabla[\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\log n^2)]=0,\\&\nabla^2\boldsymbol{H}-\frac{n^2}{c^2}\ddot{\boldsymbol{H}}+\nabla(\log n^2)\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=0。\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

对于稳态传输的电磁场，上式可写成

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\boldsymbol{E}_0-n^2k^2\boldsymbol{E}_0+\nabla[\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla(\log n^2)]=0,\\&\nabla^2\boldsymbol{H}_0-n^2k^2\boldsymbol{H}_0+\nabla(\log n^2)\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=0,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0e^{-i\omega t}$, $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, λ 为真空中波长。如果介质折射率的空间分布变化足够缓慢，即 $\nabla(\log n^2)$ 项足够小，则略去公式 (2) 两个式子的最后一项，仍可保持较高精度的近似。这样，(2) 式可写成

收稿日期：1983年2月24日

$$\nabla^2\phi + n^2 k^2 \phi = 0。\tag{3}$$

这里，$\phi^*\phi$ 代表电、磁矢量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 中任何一个的直角坐标分量平方的时间平均值除以 8π。即 $n^2\phi^*\phi$ 代表一个与坐标分量对应的平均能量密度。

在这种近似条件下，就可运用流体模型讨论光束在非均匀介质中的传输。(3) 式的一般解可写成以下形式：

$$\phi = \phi_0 e^{ikL},$$

式中 ϕ_0 和 L 都是空间坐标的实函数。

文献 [1] 已从 (3) 式导出以下两个关系式

$$\left.\begin{aligned} (\nabla L)^2 &= n^2 + \frac{1}{k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}, \\ \nabla^2 L &= -\frac{2\nabla\phi_0\cdot\nabla L}{\phi_0}。\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

对于纯几何光学传输，忽略了 (4) 式第一式的波动项 $\frac{1}{k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}$，几何光学程函梯度 ∇L_G 满足 $(\nabla L_G)^2 = n^2$，传输速度

$$\boldsymbol{V}_G = \frac{c\nabla L_G}{n^2},\tag{5}$$

式中 c 是光速。因此，在保留波动项的流体模型中，定义场流体的(能)速度

$$\boldsymbol{V}_c = \frac{c\nabla L}{n^2}\tag{6}$$

是合理的。对于均匀介质中的匀幅平面波

$$\boldsymbol{V}_c = \boldsymbol{V}_G = \frac{c}{n}。$$

用 $\frac{c^2}{n^4}$ 乘 (4) 式第一式两边，并移项得

$$c^2 = \left(\frac{c\nabla L}{n^2}\right)^2 + \left[c^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right) - \frac{c^2}{n^4 k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right]。\tag{7}$$

与描写光束在真空中传输的流体模型一样，(7) 式右边两个部分分别被理解为单位质量场流体的动能和势能。$\left(\frac{c\nabla L}{n^2}\right)^2$ 代表动能；$\left[c^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right) - \frac{c^2}{n^4 k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right]$ 代表势能。在势能项中，仍把 $-\frac{c^2}{n^4 k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}$ 理解为存在于场流体内部的张力所对应的势能[1, 2, 5]，称之为内势能。介质对内势能的影响表现为内势能中的 $\left(\frac{1}{n^4}\right)$ 因子。势能中的另一项 $c^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 是光束在真空中的传输所没有的 $\left(当 n=1,\ c^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=0\right)$，称之为外势能。介质的存在，一方面相当于存在一个外力场作用于场流体，外力场的势函数就是 $c^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；但另一方面，介质的作用也不能完全等同于作用于一群经典质点的外力场，尚需作进一步的分析。

考虑一个单位质量的质点，沿介质折射率梯度 Δn 方向运动，在不考虑内势场作用的情况下，它的动能显然等于 $(c/n)^2$，若把动能的变化看作是外势场作用的结果，则在折射率 n 处的势能 φ 应等于

$$\varphi=c^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)。\tag{8}$$

这里，规定在真空中($n=1$)的势能 φ 为零。这就是上面所说的单位质量的外势能。

另一方面，场流体的稳态流动，要满足连续性方程。在忽略光束在非均匀介质中传输所出现的费涅尔反射损失的近似情况下，在真空中单位质量场流体，传输到折射率 n 的地方，它的质量就变成 n^2，因此动量的变化 dp 应表示为

$$dp=m\,dv+v\,dm=n^2 d\left(\frac{c}{n}\right)+\frac{c}{n}\,d(n^2)=-c\,dn+2c\,dn=c\,dn,\tag{9}$$

所以，当速度 $\boldsymbol{V}/\!/\nabla n$，$dp$ 取 $c\,dn$ 值；当 $\boldsymbol{V}\perp\nabla n$，$dm=0$，$dp$ 取 $-c\,dm$ 值，差一符号。即作用于单位质点场流体的外力 $\boldsymbol{F}_e$ 等于

$$\boldsymbol{F}_e=\frac{-1}{2}(\nabla_{/\!/}\varphi-\nabla_{\perp}\varphi)。\tag{10}$$

$\nabla_{/\!/}\varphi$, $\nabla_{\perp}\varphi$ 分别代表 $\nabla\varphi$ 平行于和垂直于场流体速度 $\boldsymbol{V}_c$ 的分量，将 (8) 式代入 (10) 式得

$$\boldsymbol{F}_e=\frac{c^2}{n^3}(\nabla_{\perp}\varphi-\nabla_{/\!/}\varphi),\tag{11}$$

其中 $\nabla_{/\!/}n\equiv(\nabla n\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$, $\nabla_{\perp}n\equiv\boldsymbol{e}\times(\nabla n\times\boldsymbol{e})$。$\boldsymbol{e}$ 是沿 $\boldsymbol{V}_c$ 方向的单位矢量。

此外，(10) 式右边 1/2 因子的引入，是由于在整个流体模型中，包括在真空中的传输，均把 $\frac{p^2}{m}$ 看作是动能，而不是 $\frac{p^2}{2m}$。

弄清楚外势场作用力 $\boldsymbol{F}_e$ 的特点之后，就可从内、外势场得出整个作用于单位质量场流体的力 $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2c^2}{n^3}(\nabla_{\perp}n-\nabla_{/\!/}n)+\left[-\nabla\left(\frac{-c^2}{n^4k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)+\boldsymbol{F}_{\perp}\right]\right\},\tag{12}$$

其中，上式右边方括弧内的力称之为内力，是存在于场流体内部的体张力。除内势场梯度外，还可能存在一个垂直于场流体速度的力 $\frac{1}{2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}_c\perp\boldsymbol{F}_{\perp})$。显然，这个力不作功，故不能由内势场导出。文献[5]已证明，在真空中(或均匀介质中)$\boldsymbol{F}_{\perp}=0$。

三、流体力学尤拉方程的类比

前一节的结果，也可由经典流体力学尤拉方程[6]导出。描写满足连续性方程的稳定流动的可压缩流体的尤拉方程可表示为

$$\boldsymbol{F}=\rho(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V},\tag{13}$$

式中 ρ 是流体质量密度，$\boldsymbol{V}$ 是流体速度，$\boldsymbol{F}$ 是作用于单位体积流体的力，流体同时满足连续性方程

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0。\tag{14}$$

另一方面，由达朗贝尔方程得出的关系式 (4) 的第二式可写为 $\nabla\cdot(\phi_0^2\cdot\nabla L)=0$，并可再写成

$$\nabla\cdot\left[\left(\frac{n^2\phi_0^2}{c^2}\right)\cdot\left(\frac{c\nabla L}{n^2}\right)\right]=0。\tag{15}$$

这里，$\frac{n^2\phi_0^2}{c^2}$ 是场流体的质量密度，$\frac{c\nabla L}{n^2}$ 是场流体的速度 $\boldsymbol{V}_c$。(15) 式的成立表明：在忽略光束在非均匀介质中的费涅尔反射损失的近似情况下，场流体满足连续性方程。把 (15) 式与 (14) 式作类比，即可从尤拉方程得出作用于单位体积场流体的力 $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F}=\left(\frac{n^2\phi_0^2}{c^2}\right)\left[\left(\frac{c\nabla L}{n^2}\right)\cdot\nabla\right]\left(\frac{c\nabla L}{n^2}\right), \tag{16}$$

或写成作用于单位体积单位质量密度场流体的力 $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F}=\left[\left(\frac{c\nabla L}{n^2}\right)\cdot\nabla\right]\left(\frac{c\nabla L}{n^2}\right)。\tag{17}$$

由本文附录的运算得出

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{2c^2}{n^3}(\nabla_\perp n-\nabla_{/\!/}n)\right]+\left[-\nabla\left(\frac{-c^2}{n^4k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)+\left(\frac{2c^2}{n^3}\nabla_\perp n\right)\left(\frac{2}{n^2k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\right]\right\}。\tag{18}$$

将 (18) 式与上节 (12) 式作比较，即可得出 (12) 式中待确定的力 $\frac{1}{2}\boldsymbol{F}_\perp$

$$\boldsymbol{F}_\perp=\left(\frac{2c^2}{n^3}\nabla_\perp n\right)\left(\frac{2}{n^2k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)。\tag{19}$$

到此为止，已完全确定全部作用于场流体的外力和内力。连同连续性方程 (15) 式即可计算光束的传输。在下列几种特殊情况下，作用力 $\boldsymbol{F}$ 的表达式还可以进一步简化。

1. 均匀介质

当折射率 n 是常数，作用力 $\boldsymbol{F}_{均匀}$ 等于

$$\boldsymbol{F}_{均匀}=\nabla\left(\frac{c^2}{2n^4k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)=\frac{c^2}{2n^4k^2}\nabla\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)。\tag{20}$$

2. 傍轴光束

这里，傍轴条件是指 $\left|\frac{\Delta L}{n}\right|\doteq 1$，$\nabla L\times\boldsymbol{e}_3\doteq 0$，$\boldsymbol{e}_3$ 是沿传输轴的单位矢量。由 (4) 式第一式可看出，对于傍轴光束 $\frac{1}{n^2k^2}\cdot\frac{\nabla\phi_0}{\phi_0}\ll 1$。

因此$\left(\frac{2c^2}{n^3}\nabla_\perp n\right)\left(\frac{2}{n^2k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\ll\frac{2c^2}{n^3}(\nabla_\perp n)$，即 $\frac{1}{2}\boldsymbol{F}_\perp$ 与垂直于 $\boldsymbol{V}_c$ 的外力 $\frac{c^2}{n^3}\nabla_\perp n$ 相比可略去。这样，对于傍轴光束，作用力 $\boldsymbol{F}_{傍轴}$ 等于

$$\boldsymbol{F}_{傍轴}=\frac{c^2}{n^3}(\nabla_\perp n-\nabla_{/\!/}n)+\frac{c^2}{k^2}\nabla\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{n^4\phi_0}\right)。\tag{21}$$

3. 傍轴光束，折射率梯度垂直于传输轴($\nabla n\perp e_3$)

在这种情况下，$\nabla L\times\boldsymbol{e}_3\doteq 0$，所以 $\nabla_{/\!/}n\doteq 0$。由此得 $\nabla_\perp n\doteq\nabla n$。这样，作用力 $\boldsymbol{F}_{傍轴,\nabla n\perp e_3}$ 等于

$$\boldsymbol{F}_{\substack{傍轴\\ \nabla n\perp e}}=\frac{c^2}{n^3}\nabla n+\left[\frac{c^2}{2k^2}\nabla\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{n^4\phi_0}\right)+\left(\frac{c^2\nabla n}{n^3}\right)\left(\frac{2}{n^2k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\right]。$$

又考虑到 $\frac{c^2}{2k^2}\nabla\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{n^4\phi_0}\right)=\frac{c^2}{2n^4k^2}\nabla\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)-\left(\frac{c^2}{n^3}\nabla n\right)\left(\frac{2}{n^2k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)$，代回上式得

$$\boldsymbol{F}_{\substack{\text{傍轴}\\ \nabla n\perp e}}=\frac{c^2}{n^3}\nabla n+\frac{c^2}{2n^4k^2}\nabla\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)=\frac{c^2}{n^2}\left[\frac{\nabla n}{n}+\frac{1}{2n^2k^2}\nabla\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\right]。\tag{22}$$

光束在变折射率介质光学波导中的传输和强激光束在介质中的自聚焦传输等过程均属这种类型。

四、傍轴光束在非均匀介质中传输的计算步骤

文献 [3] 已解决如何利用流体模型计算傍轴光束在真空中传输的步骤。有了上两节的基础，就可推广这种计算步骤到缓变非均匀介质中。从起始光束截面给定的 ϕ_0^2, L 分布，利用(4) 式第二式可得出下一个邻近截面的 ϕ_0^2 分布。然后引用作用力方程可确定下一个邻近截面的 $(\nabla L)_x$ 及 $(\nabla L)_y$ 分布。以此类推，即可计算整个光束传输过程。为简明起见，只列出 $\nabla n\perp \boldsymbol{e}_3$ 情况下光束传输的计算步骤。

用 (1)、(2) 分别代表已知截面和待求的邻近截面，两截面的间隔为 δ_z, z 轴为传输轴，n 的分布已知。由傍轴条件得 $(\nabla L)_z\doteq n$, $\frac{\partial}{\partial z}(\nabla L)_z\doteq 0$。由 (4) 式第二式两边各自展开成

$$\nabla^2 L=\nabla\cdot\nabla L=\frac{\partial}{\partial x}(\nabla L)_x+\frac{\partial}{\partial y}(\nabla L)_y+\frac{\partial}{\partial z}(\nabla L)_z\doteq\frac{\partial}{\partial x}(\nabla L)_x+\frac{\partial}{\partial y}(\nabla L)_y,$$

$$\frac{\nabla\phi_0\cdot\nabla L}{\phi_0}=(\nabla L)_x\frac{1}{\phi_0}\frac{\partial\phi_0}{\partial x}+(\nabla L)_y\frac{1}{\phi_0}\frac{\partial\phi_0}{\partial y}+\frac{n}{\phi_0}\frac{\partial\phi_0}{\partial z}。$$

代回 (4) 式第二式得

$$\frac{\partial\phi_0^2}{\partial z}=-\frac{1}{n}\left[\phi_0^2\frac{\partial}{\partial x}(\nabla L)_x+(\nabla L)_x\frac{\partial\phi_0^2}{\partial x}\right]-\frac{1}{n}\left[\phi_0^2\frac{\partial}{\partial y}(\nabla L)_y+(\nabla L)_y\frac{\partial\phi_0^2}{\partial y}\right],$$

由此得下一截面的 ϕ_0^2 分布

$$(\phi_0)^2_{(2)}=(\phi_0^2)_{(1)}+\left(\frac{\partial\phi_0^2}{\partial z}\right)_{(1)}\delta z。\tag{23}$$

传输单位长度，$\boldsymbol{V}_0$ 方向的变化分别为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta_x}{\partial z}&=\frac{(\boldsymbol{F})_x\left(\frac{n}{c}\right)}{\left(\frac{c}{n}\right)}=\frac{n^2}{c^2}(\boldsymbol{F})_x,\\ \frac{\partial\theta_y}{\partial z}&=\frac{(\boldsymbol{F})_y\left(\frac{n}{c}\right)}{\left(\frac{c}{n}\right)}=\frac{n^2}{c^2}(\boldsymbol{F})_y,\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

这里 $\theta_x=\frac{(\nabla L)_x}{(\nabla L)_z}=\frac{(\nabla L)_x}{n}$, $\theta_y=\frac{(\nabla L)_y}{(\nabla L)_z}=\frac{(\nabla L)_y}{n}$。(24) 式已包含傍轴近似。(22) 式代入 (24) 式得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta_x}{\partial z}&=\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x}+\frac{1}{2n^2k^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right),\\ \frac{\partial\theta_y}{\partial z}&=\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial y}+\frac{1}{2n^2k^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)。\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

最后得出下一截面的 $(\nabla L)_x$ 和 $(\nabla L)_y$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{(2)}&=\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{(1)}+\left[n\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial z}\right)\right]_{(1)}\delta z\\&=\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{(1)}+\left[\frac{\partial n}{\partial x}+\frac{1}{2nk^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\right]_{(1)}\delta z,\\\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)_{(2)}&=\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)_{(1)}+\left[\frac{\partial n}{\partial y}+\frac{1}{2nk^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\right]_{(1)}\delta z。\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

注意与下一截面 $(\nabla L)_x$, $(\nabla L)_y$ 对应的位置 $(x, y)_{(2)}$ 已移至

$$\left.\begin{aligned}x_{(2)}&=x_{(1)}+(\theta_x)_{(1)}\delta z,\\y_{(2)}&=y_{(1)}+(\theta_y)_{(1)}\delta z。\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

这样，利用 (23)、(26)、(27) 式建立一个计算机程序，即可计算傍轴光束的传输过程。

作为一个例子，如果起始截面的 θ_x、θ_y 均为零(平行光束)，如要求光束保持平行传输，则要求 $\frac{\partial\theta_x}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial\theta_y}{\partial z}$ 应处处为 0，而此介质的折射率分布必须满足

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial x}+\frac{1}{2nk^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)=0,\\\frac{\partial n}{\partial y}+\frac{1}{2nk^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)=0。\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

这里，ϕ_0 是由初始条件给出的，将初始条件代入 (28) 式并分别解出两个微分方程，即可得到保证光束平行传输所要求的折射率分布。

附 录

作用力公式 (17) 的运算

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{\nabla L}{n^2}\cdot\nabla\right)\frac{\nabla L}{n^2}\right]=&\frac{(\nabla L)_x}{n^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(\nabla L)_x}{n^2}\right]\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(\nabla L)_y}{n^2}\right]\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(\nabla L)_z}{n^2}\right]\boldsymbol{k}\right\}\\&+\frac{(\nabla L)_y}{n^2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(\nabla L)_x}{n^2}\right]\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(\nabla L)_y}{n^2}\right]\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(\nabla L)_z}{n^2}\right]\boldsymbol{k}\right\}\\&+\frac{(\nabla L)_z}{n^2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{(\nabla L)_x}{n^2}\right]\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{(\nabla L)_y}{n^2}\right]\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{(\nabla L)_z}{n^2}\right]\boldsymbol{k}\right\}\\=&\left[\frac{(\nabla L)_x}{n^4}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\boldsymbol{i}+\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial z}\boldsymbol{k}\right)+\frac{(\nabla L)_y}{n^4}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\boldsymbol{j}+\frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial z}\boldsymbol{k}\right)\right.\\&\left.+\frac{(\nabla L)_z}{n^4}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial z\,\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial^2 L}{\partial z\,\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\boldsymbol{k}\right)\right]\\&-2\left[\frac{(\nabla L)_x}{n^5}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial n}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial n}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial n}{\partial x}\boldsymbol{k}\right)\right.\\&+\frac{(\nabla L)_y}{n^5}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial n}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial n}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial n}{\partial y}\boldsymbol{k}\right)\\&\left.+\frac{(\nabla L)_z}{n^5}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial n}{\partial z}\boldsymbol{i}+\frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial n}{\partial z}\boldsymbol{j}+\frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial n}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\right]\\=&\frac{1}{2n^4}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla L)^2\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}(\nabla L)^2\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}(\nabla L)^2\boldsymbol{k}\right]\\&-\frac{2}{n^5}[(\nabla L)_x(\nabla L\cdot\nabla n)\boldsymbol{i}+(\nabla L)_y(\nabla L\cdot\nabla n)\boldsymbol{j}+(\nabla L)_z(\nabla L\cdot\nabla n)\boldsymbol{k}]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2n^4}[\nabla(\nabla L)^2]-\frac{2}{n^5}[\nabla L\cdot\nabla n]\nabla L=\frac{1}{2n^4}[\nabla(\nabla L)^2]-\frac{2(\nabla L)^2}{n^5}(\nabla n\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e},$$

$\boldsymbol{e}$ 是沿 ∇L 方向的单位矢量。

将原文 (4) 式第一式及 (11) 式代入上式得

$$\left[\left(\frac{\nabla L}{n^2}\cdot\nabla\right)\frac{\nabla L}{n^2}\right]=\frac{1}{2n^4}\left[\nabla\left(n^2+\frac{1}{k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\right]-\frac{2}{n^5}\left[\left(n^2+\frac{1}{k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\nabla_{/\!/}n\right]$$

$$=\frac{1}{n^3}(\nabla_\perp n+\nabla_{/\!/}n)-\frac{2}{n^3}\nabla_{/\!/}n+\frac{1}{2n^4}\nabla\left(\frac{1}{k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)-\frac{2}{n^5k^2}\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\nabla_{/\!/}n$$

$$=\frac{1}{n^3}(\nabla_\perp n-\nabla_{/\!/}n)+\frac{1}{2n^4}\nabla\left(\frac{1}{k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)-\left(\frac{2}{n^5k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\nabla_{/\!/}n。$$

又因为

$$\nabla\left[\frac{1}{n^4k^2}\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\right]=\frac{1}{n^4}\nabla\left(\frac{1}{k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)+\left(\frac{1}{k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\left(-\frac{4}{n^5}\nabla n\right)$$

$$=2\left[\frac{1}{2n^4}\nabla\left(\frac{1}{k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)-\left(\frac{2}{n^5k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\nabla_{/\!/}n\right]-\frac{4}{n^5k^2}\left(\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\nabla_\perp n,$$

代回上式得

$$\left[\left(\frac{\nabla L}{n^2}\cdot\nabla\right)\frac{\nabla L}{n^2}\right]=\frac{1}{n^3}(\nabla_\perp n-\nabla_{/\!/}n)+\frac{1}{2}\nabla\left(\frac{1}{n^4k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)$$

$$+\left(\frac{2}{n^5k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\nabla_\perp n。$$

代回正文 (17) 式，即得(18)式。

参 考 文 献

[1] 邓锡铭，方洪烈；《激光》，1980, 1, No. 2 (Feb), 14.
[2] 邓锡铭，方洪烈；《激光》，1979, 6, No. 11 (Nov), 1.
[3] 邓锡铭，方洪烈；林伟平，《光学学报》，1981, 1, No. 1 (Jan), 25.
[4] M. Born, E. Wolf; *«Principles of Optics»*, (Pergamon, New York, 1959) 10.
[5] 邓锡铭，方洪烈；《激光》，1981, 8, No. 1 (Jan), 1.
[6] 朗道，栗弗席兹著；《连续介质力学》，(人民教育出版社，1958) 4.

Light beam propagation in a gradually spatial-varied refractive index medium

DENG XIMING AND LIN WEIPING

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 24 February 1983)

Abstract

In this paper, we have derived a equation of light beam propagation in a gradually spatial-varied refractive index meduim based on the hydrodynamic model.