

干涉条纹的微处理机分析

伍树东 郑辉

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

利用微处理计算机建立了干涉条纹的数据分析系统,其中包括波面插值、象差和面形分析、点扩散函数、积分能量分布和光学传递函数的计算等。该系统还可修正干涉仪的误差、测量波面平均曲率等。

在大多数干涉度量工作中,许多结果都是以干涉条纹形式记录下来。从对干涉条纹的分析来获得所需信息。因此干涉条纹的分析是干涉计量工作中的一个重要环节。简单地从条纹分布估计面形分布或波面质量的定性分析已不能满足很多用途的要求。近年来已发展用小型计算机作为干涉条纹数据分析的独立系统^[1, 2]。Bruning 还以小型计算机发展了扫描干涉仪取得了高精度的测量波面的结果^[3]。

本文目的主要是介绍以 ALPHA 微处理机为基础建立的干涉条纹数据的分析系统,该系统对用标准参考波面的任意干涉度量系统都适用。

一、条纹插值

为分析干涉条纹数据,首先要求得干涉条纹所代表的波面(或面形)的波面函数近似表达式。这是干涉条纹分析的主要环节。通常干涉条纹数据是由条纹中心的取样点的坐标以及与其对应的干涉级数组成,干涉条纹级数也就是该点上的波面与比较波面的光程差(以波长或半波长为单位)。本文采用了带权重最小二乘法来求波面函数,即

$$\sum_k |V_k - F(x_k, y_k)|^2 \cdot W(x_k, y_k) = \text{minimum}, \quad (1)$$

其中 (x_k, y_k, V_k) 分别是在第 k 个取样点上的 x, y 坐标和对应的干涉级数, $F(x_k, y_k)$ 为待求波面函数, $W(x_k, y_k)$ 为对第 k 个取样点的权重因子。 \sum_k 表示对所有取样点求和。若 $F(x, y)$ 满足 (1) 式,即保证函数 $F(x, y)$ 最大限度地与干涉条纹数据吻合。为求解 (1) 式把 $F(x, y)$ 展开为一组已知函数的线性组合,即

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{s_{\max}} C_i \cdot \phi_i(x, y), \quad (2)$$

其中 ϕ_i 为已知函数组, s_{\max} 为项数。把 (2) 式代入 (1) 式中,问题归结为求解系数 $\{C_i\}$ 。在 (1) 式中若对 C_s (其中 $s=1, 2, \dots, s_{\max}$) 求极值,则可得如下的代数方程组:

$$\sum_{i=1}^{s_{\max}} C_i \left[\sum_k \phi_i(x_k, y_k) \cdot \phi_s(x_k, y_k) \cdot W(x_k, y_k) \right] = \sum_k V_k \cdot \phi_s(x_k, y_k) \cdot W(x_k, y_k)$$

$$(s=1, 2, \dots, s_{\max}), \quad (3)$$

显然若函数组 $\{\phi_i\}$ 满足如下正交关系:

$$\sum_k \phi_i(x_k, y_k) \cdot \phi_s(x_k, y_k) \cdot W(x_k, y_k) = \delta_{is}, \quad (4)$$

则 (3) 式变为:

$$C_s = \sum_k V_k \cdot \phi_s(x_k, y_k) \cdot W(x_k, y_k) \quad (s=1, 2, \dots, s_{\max}), \quad (5)$$

即系数 $\{C_i\}$ 可以直接求得。满足 (4) 式的函数组称之为在数据点上的带权正交多项式。它与一般正交函数区别在于正交区是在非均匀地分布的数据点上, 而不是均匀地在某一区间。

为寻找 $\{\phi_i(x, y)\}$, 我们采用了 Forsythe 方法^[4]。先讨论一维情况。把 $\phi_i(x)$ 展开为 x 的多项式:

$$\phi_j(x) = \sum_{i=1}^j a_{ji} x^{(i-1)}, \quad (j=1, 2, \dots, S_{\max}). \quad (6)$$

为了求系数 $\{a_{ji}\}$, 设 (6) 式的逆关系为:

$$x^{(j-1)} = \sum_{i=1}^j \alpha_{ji} \cdot \phi_i(x), \quad (j=1, 2, \dots, S_{\max}). \quad (7)$$

利用 $\{\phi_i(x)\}$ 的正交性 (4) 式, 不难导得下列关系:

$$\alpha_{js} = \sum_k x_k^{j-1} \cdot \phi_s(x_k) \cdot W(x_k), \quad (s=1, 2, \dots, j-1), \quad (8)$$

$$\alpha_{jj}^2 = \sum_k x_k^{j-1} \cdot \phi_j(x_k) \cdot W(x_k) - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ji}^2, \quad (9)$$

$$\phi_j(x) = \frac{1}{\alpha_{jj}} \left[x^{j-1} - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ji} \cdot \phi_i(x) \right], \quad (10)$$

循环利用 (8)、(9)、(10) 式, 可以相继对 $j=1, 2, \dots, s_{\max}$ 求得各 α_{js} 系数。系数矩阵 $\{\alpha_{ij}\}$ 的逆矩阵就是系数矩阵 $\{a_{ij}\}$ 。因为 $\{\alpha_{ij}\}$ 是一个三角形矩阵, 计算它的逆矩阵非常方便。求得系数矩阵 $\{a_{ij}\}$, 也就是求得了数据点上的带权正交多项式, 它们被展成 x 的多项式。

利用 (5) 式, 可求得待求波面函数对正交函数组 $\{\phi_s\}$ 的展开系数 $\{C_s\}$ 。当然波面函数直接表示为多项式组合更方便于使用。这只要通过 (6) 式最后可得:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{s_{\max}} d_i x^{i-1}, \quad d_i = \sum_{s=1}^{s_{\max}} C_s \cdot a_{si}, \quad (11)$$

故 $\{d_i\}$ 就是待求的波面函数的多项式展开。

以上分析是一维情况。对二维的波面函数, 显然应有四维的 $\{a_{i_1 i_2 j_1 j_2}\}$ 和 $\{\alpha_{i_1 i_2 j_1 j_2}\}$ 矩阵, 这对计算很不方便。若把两维问题化为一维问题, 可大大简化计算。本文的步骤是这样, 在 (7) 式中左面的 x 幂函数应改为 $x^{j_1-1} \cdot y^{j_2-1}$ 。为了把 j_1 和 j_2 两个标号用一个标号表示, 可把函数 $x^{j_1-1} \cdot y^{j_2-1}$ 按一定顺序排列, 我们按 x, y 的幂指数之和, 从小到大排列; 而对相同指数和, 则按 x 的升幂顺序排列, 并记为 $P_j(x, y)$, $j=1, 2, \dots, s_{\max}$ 。这时 (7) 式应改写为:

$$P_j(x, y) = \sum_{i=1}^j \alpha_{ji} \cdot \phi_i(x, y). \quad (12)$$

从 (12) 式可以导出一系列与一维情况相同的关系。差别只是把一维的幂函数 x^{j-1} 换为二维的幂函数 $P_j(x, y)$ 。最后得到待求波面函数对两维幂函数 $\{P_j(x, y)\}$ 的展开表达式。

在一维情况 $(s_{\max}-1)$ 对应于 x 的最高幂指数, 当被插值函数变化率较大时, 应选取较大的 s_{\max} 。在两维情况, 一般说来, 当选定了最高 x, y 幂指数之和 N , 以后, 展开应对幂指

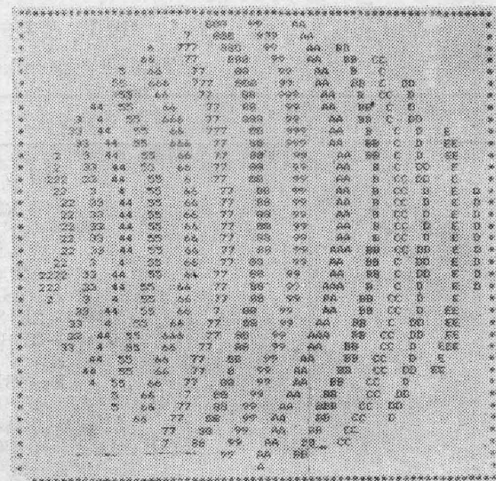
数和小于、等于 N_p 的所有项 $P_s(x, y)$ 进行。

s_{max} 与 N_p 的关系为: $s_{max} = \frac{1}{2} (n_p + 1) (n_p +$

2)。还应指出, 由于 $\{\alpha_{ij}\}, \{a_{ij}\}$ 矩阵是三角矩阵, 因此高幂项的展开并不影响低幂项的展开, 即当对某一 N_p 作展开后, 若发现精度不够, 可以增大 N_p , 但这时只需在原有基础上增加 $\{a\}, \{a\}$ 的高次项系数, 而不必从低项重新计算。当然一般应使取样数据点的总数大于展开的次数 s_{max} , 否则变成一欠确定的问题。

至于权重函数 $W(x, y)$ 的选择问题, 为了使函数在整个区间里的误差分布均匀, 我们选取 Chebyshev 多项式的权重因子, 在二维情况下可类似地选取 $W(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 。

例如对一组以手工输入计算机的干涉条纹数据, 图 (1) 给出了插值后的波面等相线。下方的表给出了与等相线的符号对应的光程差。其中 $s_{max} = 36$ 。插值精度达 $\frac{1}{50} \lambda$ 。若 s_{max} 增加, 精度还可提高。



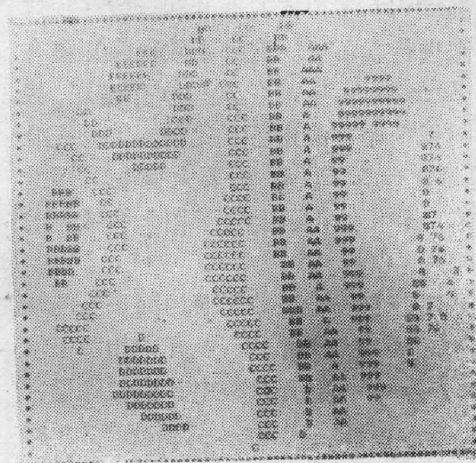
符号	1	2	3	4	5	6		
程差	0.00	0.43	0.86	1.30	1.73	2.17	2.60	
符号	7	8	9	A	B	C	D	E
程差	3.04	3.47	3.91	4.34	4.77	5.21	5.64	6.08

波长单位
等程差线间隔: 0.4342 (波长)
等程差线线宽: 0.0868 (波长)
峰-峰程差: 6.0800 (波长)

图 1 干涉图的插值等相线图
Fig. 1 Interferogram interpolation

二、Zernike 多项式的展开和干涉仪误差的消除

在光学系统的检验中, 大多数被测波面都是在一圆孔径内。而 Zernike 多项式是在圆区域内的正交多项式组。若把波面展开为 Zernike 多项式的组合, 将对数据分析和应用带来很大方便^[5]。



符号	1	2	3	4	5	6		
程差	0.00	0.18	0.36	0.55	0.73	0.92	1.10	
符号	7	8	9	A	B	C	D	E
程差	1.29	1.47	1.66	1.84	2.03	2.21	2.40	2.58

波长单位
等程差线间隔: 0.1846 (波长)
等程差线线宽: 0.0369 (波长)
峰-峰程差: 2.5847 (波长)

图 2 被测波面等相线图
Fig. 2 Wavefront OPD contour map

表 1 程差的泽尼克多项式展开
Table 1 Zernike polynomial coefficients

项 号	泽尼克多项式	象差名称	系 数
1	1	常数项	3.705424
2	RCOSQ	x 方向倾斜	3.457222
3	RSINQ	y 方向倾斜	-.196034
4	$R^{**2}SIN2Q$	$\pm 45^\circ$ 方向象散	-.004031
5	$(2R^{**2}-1)$	离焦	.331971
6	$R^{**2}COS2Q$	0° 和 90° 方向象散	.351147
7	$R^{**3}SIN3Q$	x 轴方向三级慧差	.085399
8	$(3R^{**3}-2R)SINQ$	y 轴方向三级慧差	.094780
9	$(3R^{**3}-2R)COSQ$.024701
10	$R^{**3}COS3Q$		-.007912
11	$R^{**4}SIN4Q$		-.064524
12	$(4R^{**4}-3R^{**2})SIN2Q$.054948
13	$6R^{**4}-6R^{**2}+1$	三级球差	.066109
14	$(4R^{**4}-3R^{**2})COS2Q$.018214
15	$R^{**4}COS4Q$		-.394207
16	五级项		-1.015740
17	五级项		.313188
18	五级项		.203045
19	五级项		.010610
20	五级项		.031246
21	五级项		-.022305
22	六级项		-.010415
23	六级项		.020097
24	六级项		-.009104
25	六级项		-.028717
26	六级项		.104271
27	六级项		-.162448
28	六级项		.235976
29	七级项		.490700
30	七级项		-.346046
31	七级项		.139622
32	七级项		-.025758
33	七级项		-.022422
34	七级项		.016754
35	七级项		.018688
36	七级项		-.22761

若用 $Z_n(x, y)$ 表示归一化的 Zernike 多项式, 则在半径为 1 的圆孔径内波面函数可表示为 $F(x, y) = \sum_{n=1}^{S_{\max}} e_n \cdot Z_n(x, y)$ 。Zernike 多项式的每一项对应于一种象差, 其中也包括了倾斜、离焦等。在实际干涉测量中不可避免引入倾斜或离焦等因素。在数据分析时, 扣除对应于倾斜、离焦的 Zernike 项, 才能得到实际的面形^[6]。

Zernike 多项式也是由 x, y 的幂函数组成, 因此 Zernike 多项式的展开和一般多项式的展开之间的转换只要通过系数变换矩阵的线性变换来进行就可以。这种系数变换矩阵在文献 [5] 中已给出。当然也可以在条纹插值中直接用 Zernike 多项式 $Z_n(x, y)$ 作基底, 代替 $P_n(x, y)$, 这样直接得 Zernike 展开结果。我们对使用两个方法进行了比较, 结果完全一致。但由于计算 $Z_n(x, y)$ 在各数据点上的值的计算量比计算 $P_n(x, y)$ 要大得多。因此还是应以 $P_n(x, y)$ 作为基底, 然后再把系数加以转换。表 1 给出了对应于图 1 的数据的 Zernike 展开结果。

图 2 是扣除常数、倾斜、离焦因素后波面的等相线图。它代表了被测面的面形。与从 Zernike 展开中扣除常数、倾斜、离焦等因素的方法一样, 也可以从 Zernike 展开中扣除干涉仪的误差因素。对于一个标准被测元件, 在测量所得的 Zernike 展开系数中, 当扣除了常数、倾斜、离焦因素以后剩余的系数即应代表干涉仪的误差。因此在测量中, 只要在 Zernike

展开中扣除了这些系数值,即可把干涉仪引入的误差消除。

此外,从 Zernike 展开式中的离焦项可以求得波面的平均曲率半径 R ,若离焦项系数为 a_5 ,则

$$R = 7.07 \times 10^{-2} \frac{D^2}{\lambda a_5},$$

其中 λ 为波长, D 为孔径的直径。坐标值在计算中以 $0.94 \frac{D}{2}$ 归一化了。

三、点扩散函数和光学传递函数

若被分析的波面代表成像系统或准直光束的波面,则 $\exp[j\phi(x, y)]$ 的傅里叶变换的模的平方是系统的点扩散函数 PSF ,也就是焦平面上的光强分布,其中 $\phi(x, y)$ 是扣除了倾斜、离焦等因素后的波面函数。对点扩散函数再作傅里叶变换,并取其模,便得系统的调制传递函数。

在计算点扩散函数时,应使光瞳函数取样点数足够大,避免周期谱交叠误差。并且应使计算区间大于或等于二倍光瞳尺寸,以便计算调制传递函数。若要求焦斑积分能量分布,则计算区间应是光瞳的 M 倍,使得能在点扩散函数的主峰内有 $(2M-1)$ 个数据点。

四、微处理机的使用

本文使用的是内存为 64K 字节的微处理机。由于内存有限,必须合理地安排内存分配,才能得到较快的处理速度。对多次使用的数据,可在磁盘或内存中建立适当数据库。如在插值计算中多次使用 $\{x^i \cdot y^j\}$ 在各数据点上的值,有必要先把 $\{x^i\}$, $\{y^j\}$ 在各数据点上值计算好,以便多次使用中不用重新计算。

为了计算面形分布,在对波面进行 Zernike 多项式展开,并把常数、倾斜、离焦等项扣除后,应再把 Zernike 多项式转换为一般多项式,从而计算面形分布。而各多项式的值可从事先计算好的数据库中得到,数据库中则存放着一组在均匀取样网格各点上各多项式值的数据。对于一具体多项式展开,只要加上各项的展开系数,就能方便地求得面形的分布。

在计算傅里叶变换中,采用了快速傅里叶变换方法。在我们的微处理机中内存可以允许 32×32 的复数组傅里叶变换, 64×64 的实数组傅里叶变换。为了保证光学传递函数的计算,孔径内的取样是 16×16 。若这样的取样数不能满足周期谱重叠的误差要求或需计算点扩散函数的能量分布时,应增加点阵数目。当然这时需要同时使用磁盘与内存来进行傅里叶变换,计算速度较慢。在我们的计算机中进行 32×32 复数的傅里叶变换约需一分钟左右。

我们改用打印机代替了 x, y 数字绘图仪。所有曲线、图表都是在打印机上输出的。

参 考 文 献

- [1] M. P. Rimmer; *Appl. Opt.*, 1972, 11, No. 12 (Dec), 2790.
- [2] K. H. Womack; *«SPIE Proceedings»*, 1979, 192.
- [3] J. H. Brunging; *Appl. Opt.*, 1974, 13, No. 11 (Nov), 2693.

- [4] G. E. Forsythe: *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 1957, **5**, No. 1, 74.
[5] D. A. Malacara: *Optical Shop Testings*, (John Wiley & Sons, New York, 1978).
[6] M. Born, E. Wolf: *Principles of Optics*, (London, Pergamon, 1964).

Interferogram analyses with microcomputer

WU SHUDONG AND ZHENG HUI

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 22 January 1983, revised 20 April 1983)

Abstract

Based on a microcomputer, authors developed an interferogram data analysis system which can perform wavefront interpolation, aberration analyses, OPD contour mapping, PSF and OTF calculations etc., The system is also capable of correcting errors caused by interferometers and measuring average wavefront curvature. The algorithms may be applied to any interferometric systems with a standard reference wavefront.