

# 光学双稳性的尖顶突变模型

李淳飞 马爱群  
(哈尔滨工业大学)

## 提 要

本文提出一个描述光学双稳性的简明的突变理论模型, 由此得到产生光学双稳性的阈值条件, 并指出控制双稳特性的方法。

多数光学双稳态装置系将非线性介质置于法布里-珀罗标准具中构成。设入射光强为  $I_i$ , 透射光强为  $I_t$ , 若不计介质的吸收, 则透射率为

$$\tau = \frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2F}{\pi} \sin \frac{\phi}{2}\right)^2}, \quad (1)$$

式中  $F$  为标准具的精细度,  $\phi$  为光在腔内往返一次的相移。无论是采用色散介质和腔镜光学反馈的全光学型装置, 还是采用电光晶体和腔外光电反馈的混合型装置,  $\phi$  皆可表示为如下形式<sup>[1]</sup>:

$$\phi = \phi_0 + KI_t, \quad (2)$$

式中  $K$  为表征介质非线性强弱的系数;  $\phi_0$  为初相移, 它依赖于标准具的腔长  $d$ , 介质的折射率  $n$ , 入射激光的波长  $\lambda$ , 即  $\phi_0 = \frac{4n}{\lambda} nd$ 。考虑到  $\phi = 2m\pi$  处  $\tau$  取极大值,  $\tau - \phi$  曲线(见图1)在该处极窄, 可将  $\sin \frac{\phi}{2}$  以  $2m\pi$  为中心展开成泰勒级数, 略去二次以上的高次项得  $\sin \frac{\phi}{2} \approx (-1)^m \frac{1}{2} (\phi - 2m\pi)$ 。

今定义  $\theta$  为相对  $\tau$  取极值时的初相移(简称相对相移), 它表征标准具的谐振腔相对入射激光的频率调谐, 即

$$\theta = 2m\pi - \phi_0 = (\nu_m - \nu) \frac{4\pi nd}{c}, \quad (3)$$

式中  $\nu$  是入射激光的频率,  $\nu_m$  是谐振腔的共振频率。因此由(1)、(2)及(3)我们得到一个  $I_t$  的三次方程

$$I_t^3 + aI_t^2 + bI_t + c = 0, \quad (4)$$

$$a = -2 \frac{\theta}{K}, \quad b = \left(\frac{\theta}{K}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{KF}\right)^2, \quad c = -\left(\frac{\pi}{KF}\right)^2 I_i. \quad (5)$$

若我们设

$$\left. \begin{aligned} I_t' &= I_t + \frac{a}{3}, \\ P &= -\frac{1}{3} a^2 + b, \\ q &= \frac{2}{27} a^3 - \frac{1}{3} ab + c, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

则 (4) 变成具有一个自变量 ( $I_t$ )、两个参变量 ( $p, q$ ) 在临界条件下的典型尖顶突变方程<sup>[2]</sup>

$$I_t^3 + PI_t + q = 0. \tag{7}$$

根据突变理论, 可以在三维空间 ( $I_t, p, q$ ) 构成一个临界曲面。由于 (7) 式是等价于 (4) 式的三阶方程, 必然也可取  $I_t$  作自变量,  $I_s$  和  $\theta$  为参变量, 在 ( $I_t, I_s, \theta$ ) 三维空间构成一个曲面, 虽然由于坐标变换曲面的形状发生改变, 但仍然存在折褶, 如图 2 所示。曲面上有两个稳定区和一个不稳定区。折褶部分相应于双稳区。在平行于  $I_t - I_s$  的平面内得到双稳态曲线, 如图 3 所示, 负斜率段为不稳定区。折褶区在  $I_t - \theta$  平面内的投影得到分支曲线, 如图 4 所示。两条分支曲线内部是双稳区, 双稳范围随  $\theta$  的增大而扩大。

方程 (7) 式或 (4) 式的根的性质由判别式

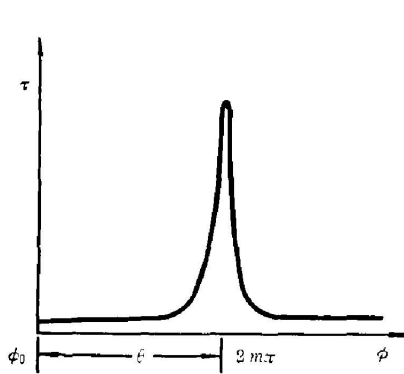


图 1  $\tau-\phi$  曲线  
Fig. 1  $\tau-\phi$  characteristics

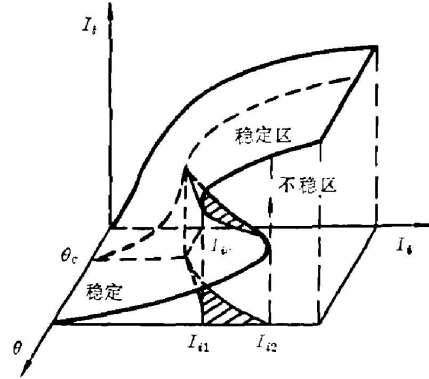


图 2 光学双稳性的突变模型  
Fig. 2 The catastrophe model of optical bistability

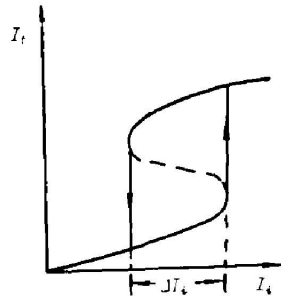


图 3 双稳曲线  
Fig. 3 The optical bistability curve

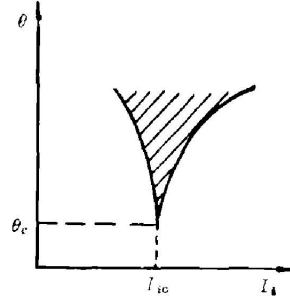


图 4 分支曲线  
Fig. 4 The branched curve

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 \tag{8}$$

确定。当  $\Delta < 0$ , 具有三个不等的实根, 相应于双稳态存在的区域。将 (6) 代入 (8), 得

$$4\left(-\frac{1}{3}a^2 + b\right)^3 + 27\left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right)^2 < 0. \tag{9}$$

(9) 式成立必须满足  $-\frac{1}{3}a^2 + b < 0$ , 将 (5) 代入得

$$\theta > \frac{\sqrt{3}\pi}{F}. \tag{10}$$

由(9)和(5)求出  $I_i$  满足的不等式

$$\left\{ \left[ \frac{2}{27} \left( \frac{\theta}{K} \right)^3 + \frac{2}{3} \frac{\theta \pi^2}{K^3 F^2} \right] - \frac{2}{\sqrt{27}} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\theta}{K} \right)^2 - \left( \frac{\pi}{KF} \right)^2 \right]^{3/2} \right\} \left( \frac{KF}{\pi} \right)^2 < I_i < \left\{ \left[ \frac{2}{27} \left( \frac{\theta}{K} \right)^3 + \frac{2}{3} \frac{\theta \pi^2}{K^3 F^2} \right] + \frac{2}{\sqrt{27}} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\theta}{K} \right)^2 - \left( \frac{\pi}{KF} \right)^2 \right]^{3/2} \right\} \left( \frac{KF}{\pi} \right)^2. \quad (11)$$

(10)和(11)给出了双稳区中  $\theta$  和  $I_i$  必须满足的条件。

(i) 当  $\Delta=0$ , 而  $p, q \neq 0$  时, 可得两条分支曲线方程:

$$I_{i1,2} = \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{9} \frac{\theta^3 F^2}{K \pi^2} + \frac{\theta}{K} \right] \pm \frac{4}{\sqrt{27}} \left( \frac{KF}{\pi} \right)^2 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\theta}{K} \right)^2 - \left( \frac{\pi}{KF} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (12)$$

由此得双稳区的范围为

$$\Delta I_i = \frac{4}{\sqrt{27}} \left( \frac{KF}{\pi} \right)^2 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\theta}{K} \right)^2 - \left( \frac{\pi}{KF} \right)^2 \right]^{3/2}. \quad (13)$$

可见双稳范围  $\Delta I_i$  随  $\theta$  的增大而扩大。

(ii) 当  $\Delta=0$ , 且  $p=q=0$  时, 得到双稳性消失的临界点  $c$  在  $\theta-I_i$  平面内的坐标值

$$\theta_c = \frac{\sqrt{3}}{F} \pi, \quad I_{ic} = \frac{8}{9} \frac{\sqrt{3}}{KF} \pi. \quad (14)$$

在临界点处双稳范围  $\Delta I_i=0$ ,  $I_i$  是  $I_i$  的单值函数, 具有光三极管特性, 如图 5 所示。

(iii)  $\Delta > 0$ , 方程 (7) 或 (4) 只有一实根 (及两共轭复根),  $I_i$  是  $I_i$  的单值函数, 不存在光学双稳性。

由上面突变模型的分析可以得到以下结论:

(1) 光学双稳态装置的双稳特性由非线性介质的非线性系数  $K$  和标准具的精细度  $F$  决定。光学双稳性的阈值条件是

$$\theta > \frac{\sqrt{3}}{F} \pi, \quad I_i > \frac{8}{9} \frac{\sqrt{3}}{KF} \pi. \quad (15)$$

为降低相对相移和入射光强的阈值, 必须增大标准具的精细度和介质的非线性系数。

(2) 光学双稳态特性曲线的形状和双稳区的范围在入射光强足够大的条件下由相对相移确定, 也即由谐振腔对激光的频率调谐确定。根据 (3) 式, 为调节光学双稳态特性曲线, 或者改变入射激光的频率, 或者改变标准具的共振频率都可以。而改变共振频率有多种方法: 对全光学型装置, 可以移动聚焦光点在垂直于标准具轴线的平面内的位置, 因为对不同的点, 可能具有不同的腔长或折射率 (标准具的精细度也是各点不同); 对混合型装置, 可以改变标准具两镜内的距离, 或者改变反馈信号的偏置电压, 从而改变折射率。

在本文之前曾有人从二能级原子模型出发, 应用描述微观过程的 Maxwell-Bloch 方程, 导出描述本征型 (吸收或色散的) 光学双稳性的突变理论模型<sup>[3~5]</sup>, 但是理论上的处理比较复杂, 而且难于与实验联系。现在我们从普遍的 (包括混合型的) 透射公式和反馈公式出发, 得到上述能够指导实验的简明突变模型。据此得到如下结论: 要想获得好的光学双稳性, 非线性强的光学材料的精细度高的标准具是必须具备的; 同时, 足够强的入射光和对初相移的适当调节也是十分重要的。

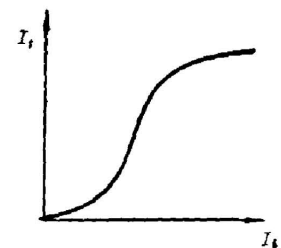


图 5 光三极管特性  
Fig. 5 The optical triode characteristics

## 参 考 文 献

- [1] 李淳飞;《物理》,1982, 11, No. 11 (Nov), 666.
- [2] Tim Poston, Ian Stewart; «*Catastrophe Theory and Its Applications*», (Pitman Publishing Limited, London, 1978).
- [3] R. Galmore, L. M. Narducci; *Phys. Rev. (A)*, 1978, 17, No. 5 (May), 1747.
- [4] G. P. Agrawal, H. J. Carmichael; *Phys. Rev. (A)*, 1979, 19, No. 5 (May), 2074.
- [5] S. A. Collins, K. C. Wasmundt; *Opt. Engineering*, 1980, 19, No. 4 (Jul/Aug), 478.

**A cusp catastrophe model of optical bistability**

LI CHUNFEI AND MA AIQUN

*(Department of Physics, Harbin Institute of Technology, China)*

(Received 18 March 1983, revised 14 June 1983)

**Abstract**

A simple and clear catastrophe theory model of optical bistability is proposed, which indicates the threshold conditions for the occurrence of optical bistability and the methods for the control of the bistable characteristics.