第3卷 第9期 光学学报 Vol. 3, No. 9
1983年12月 ACTA OPTICA SINICA December, 1983

强场与二能级系统的相互作用方程及其解析解

李 长 江
(北京化工学院)

提 要

本文提出未作旋波近似下导出的广义光学 Bloch 方程来描述强激光场与二能级原子系统的相互作用。用迭代解法求得了该方程的一阶近似解，并由此得出了感应跃迁几率随时间变化的解析表达式。它与从含时 Schrödinger 方程的幂级数解和数值积分解所得的结果一致，但解的形式简明，便于物理上应用。

一、引 言

二能级原子系统，其本征函数和能量本征值分别为 $|i\rangle$ 和 $\hbar\omega_i(i=1, 2)$。在电偶极近似下，该系统与光电场 $E\cos\omega t$ 的相互作用方程为[1]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{12} & \rho_{22}\end{bmatrix}=\left\{\begin{bmatrix}\omega_1 & -\omega_r\cos\omega t\\ -\omega_r\cos\omega t & \omega_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{bmatrix}\right\}, \tag{1}$$

其中 $\omega_r=\mu E/\hbar$, μ 为原子系统的偶极矩阵元，而 $\rho_{ij}=a_i(t)a_j^*(t)$ 为原子系统的密度矩阵元，$a_i(t)$ 为几率振幅，满足归一化条件：

$$\sum_i|a_i(t)|^2=1。\tag{2}$$

从方程 (1) 可得到强光电场中的二能级原子系统的感应极化和跃迁几率随时间的变化关系，因此求解 (1) 式是量子电子学和激光光谱学中的重要问题之一。文献 [1]～[6] 曾分别用不同的近似方法讨论过这一方程的解。

另一方面，由于任何二能级系统都可处理为自旋(1/2)系统[7]，因此，这里讨论的问题可以看做是核磁共振的光学模拟。很早就有人从 Schrödinger 方程出发研究过非旋转场中的磁共振问题，并得出了 Bloch-Siegert 频移和高次共振的重要结果[8, 9]。本文就是试图用在未作旋波近似下导出的广义光学 Bloch 方程来描述强激光场与二能级原子系统的相互作用。

二、未作旋波近似的广义光学 Bloch 方程

对密度矩阵的非对角元作如下变换：

收稿日期：1982年9月29日；收到修改稿日期：1983年6月14日

$$\rho_{12}=\tilde{\rho}_{12}e^{i\omega t}, \qquad \rho_{21}=\tilde{\rho}_{21}e^{-i\omega t}, \tag{3}$$

并引入在直角坐标系中的三个分量分别为

$$u=\tilde{\rho}_{12}+\tilde{\rho}_{21}, \qquad v=i(\tilde{\rho}_{12}-\tilde{\rho}_{21}), \qquad \omega=\rho_{11}-\rho_{22} \tag{4}$$

的矢量 $\boldsymbol{B}=[u, v, w]$，则方程 (1) 变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-(\omega-\omega_0)v-\omega_r\sin 2\omega t\cdot w,\\ \dot{v}&=(\omega-\omega_0)u+\omega_r(1+\cos 2\omega t)w,\\ \dot{w}&=-\omega_r(1+\cos 2\omega t)v+\omega_r\sin 2\omega t\cdot u。\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

方程组 (5) 为变系数线性常微分方程组，它可以归纳为

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}=(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{B}-\gamma[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(0)], \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}=[-\omega_r,\ 0,\ (\omega-\omega_0)], \quad \boldsymbol{\alpha}=[-\omega_r\cos 2\omega t,\ -\omega_r\sin 2\omega t,\ 0]。 \tag{7}$$

方程 (6) 引入了唯象阻尼项，并假设纵向弛豫时间 T_1 等于横向弛豫时间 T_2: $T_1=T_2=\gamma^{-1}$。设方程 (6) 的初始条件为 $\boldsymbol{B}(0)=[0, 0, 1]$。若略去 $\boldsymbol{\alpha}$，则相当于旋波近似，方程(6)变为通常的光学 Bloch 方程[10]。它表示 Bloch 矢量 $\boldsymbol{B}$ 绕固定的有效场矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 进动，进动频率为 Rabi 频率

$$\Omega=\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\omega_r^2}。 \tag{8}$$

阻尼的存在使 $\boldsymbol{B}$ 在进动的同时，其大小随时间 $e^{-\gamma t}$ 的规律衰减。在未作旋波近似的一般情况下，矢量 $\boldsymbol{B}$ 绕大小和方向均随时间周期变化的矢量 $\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\alpha}$ 进动。此时，方程(6)称做未作旋波近似的广义光学 Bloch 方程。

通过计算感应极化强度 $P=NT_r(\rho\mu)$ 可知，矢量 $\boldsymbol{B}$ 的横向分量 u 与感应极化强度中和外场同相的分量成正比，v 与其中与外场正交的分量成正比；而纵向分量 w 则表示原子系统处于能级 1 和 2 的几率之差。求得 w，结合归一化条件 (2)，就可以得出跃迁几率 $|a_1(t)|^2$ 和 $|a_2(t)|^2$。

三、旋波近似解

在近共振 $\omega\cong\omega_0$ 和弱场 $\omega_r\ll\omega_0$ 的条件下，可进行旋波近似，此时，方程 (6) 变为

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}-\gamma[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(0)]。 \tag{9}$$

将 $\boldsymbol{B}(t)$ 表示为随时间变化的部分 $\boldsymbol{b}(t)$ 和 $t\to\infty$ 时的稳定值 $\boldsymbol{B}(\infty)$ 之和，$\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{B}(\infty)$，并代入方程 (9)，得

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{b}-\gamma\boldsymbol{b}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}(\infty)-\gamma[\boldsymbol{B}(\infty)-\boldsymbol{B}(0)]=0, \tag{11}$$

方程 (10) 可写成常系数线性微分方程组，其解可通过将其化成高阶微分方程的方法求得；而方程 (11) 很容易通过代数运算，求出其稳态解。下面直接给出方程 (9) 满足初始条件 $\boldsymbol{B}(0)=[0, 0, 1]$的解为

$$
\left.\begin{aligned}
u&=\frac{(\omega-\omega_0)\omega_r}{\Omega^2+\gamma^2}\left(\cos\Omega t+\frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega t\right)e^{-\nu t}-\frac{(\omega-\omega_0)\omega_r}{\Omega^2+\gamma^2},\\
v&=-\frac{\omega_r\gamma}{\Omega^2+\gamma^2}\left(\cos\Omega t-\frac{\Omega}{\gamma}\sin\Omega t\right)e^{-\nu t}+\frac{\omega_r\gamma}{\Omega^2+\gamma^2},\\
w&=\frac{\omega_r^2}{\Omega^2+\gamma^2}\left(\cos\Omega t+\frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega t\right)e^{-\nu t}+\frac{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}{\Omega^2+\gamma^2}。
\end{aligned}\right\}\tag{12}
$$

在无阻尼情况下，$\gamma=0$，此时

$$
\left.\begin{aligned}
u&=\frac{(\omega-\omega_0)\omega_r}{\Omega^2}(\cos\Omega t-1),\\
v&=\frac{\omega_r}{\Omega}\sin\Omega t,\\
w&=1+\frac{\omega_r^2}{\Omega^2}(\cos\Omega t-1)。
\end{aligned}\right\}\tag{13}
$$

四、未作旋波近似的广义 Bloch 方程的解

在强场和远离共振的一般情况下，必须求解方程组 (5)。以下我们仅限于讨论无阻尼的情况。首先，考虑 $\omega=0$，即静电场的特殊情况。此时方程组(5)变为

$$
\dot{u}=\omega_0 v,\quad \dot{v}=-\omega_0 u+2\omega_r w,\quad \dot{w}=-2\omega_r v。\tag{14}
$$

方程组 (14) 的解为

$$
u=\frac{2\omega_r\omega_0}{\beta^2}(1-\cos\beta t),\qquad v=\frac{2\omega_r}{\beta}\sin\beta t,\qquad w=1+\frac{4\omega_r^2}{\beta^2}(\cos\beta t-1),\tag{15}
$$

其中 $\beta^2=4\omega_r^2+\omega_0^2$，将 (15) 同 (2) 式结合，求得 $\omega=0$ 时的跃迁几率

$$
|a_2(t)|^2=\frac{4\omega_r^2}{4\omega_r^2+\omega_0^2}\sin^2\left(\sqrt{4\omega_r^2+\omega_0^2}\cdot\frac{t}{2}\right)。\tag{16}
$$

上式与 Loudon 的结果相同[5]。

我们采用迭代解法求解方程组 (5)。一般情况下，将其解表示成下列形式：

$$
x(t)=x^{(0)}(t)+x^{(1)}(t)+\cdots,\tag{17}
$$

这里 x 代表 u, v, w。我们选旋波近似解 (13) 式作为零阶解，将其代到方程组 (5) 的右端，通过积分即可求得一阶解，

$$
\left.\begin{aligned}
u^{(1)}=&-\frac{\omega_r^3}{2\Omega^2(2\omega+\Omega)}[1-\cos(2\omega+\Omega)t]\\
&-\frac{\omega_r^3}{2\Omega^2(2\omega-\Omega)}[1-\cos(2\omega-\Omega)t]\\
&-\frac{(\omega-\omega_0)^2\omega_r}{2\Omega^2\omega}[1-\cos 2\omega t],\\
v^{(1)}=&\frac{\omega_r^3}{2\Omega^2(2\omega+\Omega)}\sin(2\omega+\Omega)t\\
&+\frac{\omega_r^3}{2\Omega^2(2\omega-\Omega)}\sin(2\omega-\Omega)t\\
&+\frac{(\omega-\omega_0)^2\omega_r}{2\Omega^2\omega}\sin 2\omega t,
\end{aligned}\right\}\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
w^{(1)}=&\frac{\omega_r^2[(\omega-\omega_0)-\Omega]}{2\Omega^2(2\omega+\Omega)}[1-\cos(2\omega+\Omega)t]\\
&+\frac{\omega_r^2[(\omega-\omega_0)+\Omega]}{2\Omega^2(2\omega-\Omega)}[1-\cos(2\omega-\Omega)t]\\
&-\frac{(\omega-\omega_0)\omega_r^2}{2\Omega^2\omega}[1-\cos 2\omega t]。
\end{aligned}
$$

用类似的方法可进一步求得二阶解以及更高阶解。当 $\omega_r<\omega$ 的条件满足时，一般可以忽略二阶以上的解。

五、讨 论

根据上述解计算跃迁几率 $|a_2(t)|^2$。在旋波近似下，

$$|a_2(t)|^2=\frac{\omega_r^2}{\Omega^2}\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right), \tag{19}$$

在准确共振的情况下，$\omega=\omega_0$, $\Omega=\omega_r$, 则

$$|a_2(t)|^2=\sin^2\left(\frac{\omega_r}{2}t\right)。 \tag{20}$$

上述结果与 Salzman 从含时 Schrödinger 方程的数值积分解中概括出的一般表达式完全相同[4]。

考虑到未作旋波近似的 Bloch 方程的一阶近似解，跃迁几率为

$$
\begin{aligned}
|a_2(t)|^2=&\frac{\omega_r^2}{\Omega^2}\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right)-\frac{\omega_r^2[(\omega-\omega_0)-\Omega]}{2\Omega^2(2\omega+\Omega)}\sin^2\left(\omega-\frac{\Omega}{2}\right)t\\
&-\frac{\omega_r^2[(\omega-\omega_0)+\Omega]}{2\Omega^2(2\omega-\Omega)}\sin^2\left(\omega-\frac{\Omega}{2}\right)t\\
&+\frac{\omega_r^2(\omega-\omega_0)}{2\Omega^2\omega}\sin^2\omega t,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

在准确共振的情况下，

$$
\begin{aligned}
|a_2(t)|^2=&\sin^2\frac{\omega_r}{2}t+\frac{\omega_r}{2(2\omega+\omega_r)}\sin^2\left(\omega+\frac{\omega_r}{2}\right)t\\
&-\frac{\omega_r}{2(2\omega-\omega_r)}\sin^2\left(\omega-\frac{\omega_r}{2}\right)t。
\end{aligned}
\tag{22}
$$

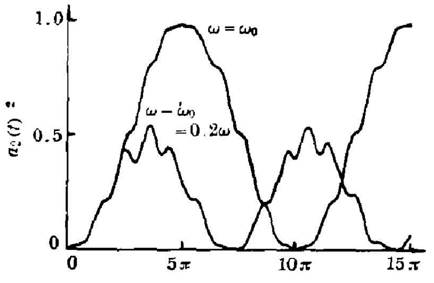

图 1 $\omega_r=0.2\omega$ 时跃迁几率随时间的变化

Fig. 1 Time dependence of the transition probability for $\omega_r=0.2\omega$

由(21)式可以看出，在跃迁几率随时间的变化中，包含有频率为 Ω 的慢振动项和频率为 2ω, $2\omega\pm\Omega$ 的快振动项。光电场的强度 ω_r 越大，快振动成分就越大；光电场的频率偏离原子系统的共振频率越远，快振动项的影响就越显著。

图 1 表示在 $\omega_r=0.2\omega$ 的条件下，分别由(21)、(22)式计算得到的非共振情况 $\omega-\omega_0=0.2\omega$ 和共振情况 $\omega=\omega_0$ 的跃迁几率随时间变化的曲线。它与 Moloney 等人由幂级数形式的解得出的曲线符合得很好[3]。

可见，用在未作旋波近似下导出的广义光学 Bloch 方程描述强场与二能级系统的相互作用是可行的，其特点是物理图象清楚，解的形式简明。

参考文献

[1] A. Muriel; *Phys. Lett.*(A), 1972, **40A**, No. 3 (Jul), 261.
[2] N. D. Sen Gupta; *Phys. Lett.*(A), 1972, **42A**, No. 1 (Nov), 33.
[3] J. V. Moloney *et al.*; *Phys. Lett.* (A), 1974, **49A**, No. 3 (Sep), 207.
[4] W. R. Salzman; *Phys. Rev. Lett.*, 1971 , **26**, No. 5 (Feb), 220.
[5] R. London; «*The Quantum Theory of Light*» (Clarendon Press, Oxford, 1978), 44
[6] 王润文;《激光》,1982, **9**, No. 4 (Apr), 193.
[7] R. P. Feynman, F. L. Vernon. R. W. Hellwarth; *J. Appl. Phys.*, 1957, **28**. No. 1 (Jan), 49.
[8] F. Bloch, A. Siegert; *Phys, Rev.*, 1940, **57**, No. 3 (Mar), 522.
[9] M. J. Winter; *C. R. Acad. Sci.*, 1955, **241**, No. 4 (25Jul), 375.
[10] R. G. Brewer; «*Frontiers in Laser Spectroscopy*, R. Balian et. al. Ed.» (North-Holland, Amsterdam, 1977), 345.

The equation of two level system-intensive fields interaction and its analytic solution

Li Changjiang

(*Beijing Institute of Chemical Technology*)

(Received 9 September 1982, revised 14 June 1983)

Abstract

In this paper, the general optical Bloch equation describing interaction between intensive fields and two level system is obtained without using rotating wave approximation. The first-order solution of this equation is obtained by iterative method and analytic formulas of transition probability as a function of time, perturbation frequency and strength are presented. These results are in agreement with those obtained by an iterative step-wise power series and numerical integration solution for the time dependent Schrödinger equation. And these simplified and clear mathmatical formulas facilitate the application of physics.