

共振双光子放大器的理论研究

朱诗尧

李瑞儒

(山西省科学技术情报研究所)

(上海市激光技术研究所)

提 要

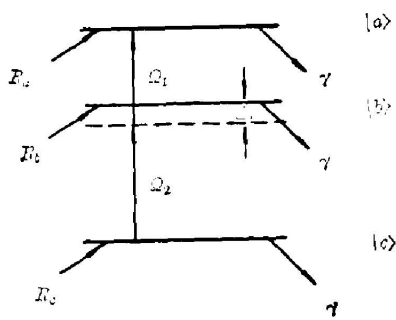
给出了阶梯型三能级原子系统在相等偏调情况下的运动主方程,得到了双光子增益系数公式。讨论了增益系数与偏调的关系曲线。

一、引 言

近几年来,双光子放大和双光子激光引起了人们广泛的兴趣。无论从理论上和实验上都取得了较大的进展。双光子放大已在实验上实现^[1],双光子双稳态现象也已在实验上观察到^[2]。本文利用文献[3]和[4]的方法给出了阶梯型三能级原子系统在相等偏调情况下的运动主方程,得到了双光子增益系数表达式,给出了增益系数与偏调的关系曲线。

二、基本模型和运动方程

图1表示阶梯型三能级原子双模激光系统, $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ 分别为原子的三个能级。模



1引起 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 能级之间的跃迁,模2引起 $|b\rangle$ 和 $|c\rangle$ 能级之间的跃迁。 Ω_1 , Ω_2 分别表示模1,模2的频率。以 R_a , R_b , R_c 分别表示对三个能级的泵浦, γ 表示能级的衰退, ω_a , ω_b , ω_c 分别表示三能级能量所对应的频率。 Δ 为偏调量

$$\Delta = \Omega_1 - (\omega_a - \omega_b) = (\omega_b - \omega_c) - \Omega_2. \quad (1)$$

设场是线偏振的,沿 z 方向传播,相互作用哈密顿量在相互作用表象下有

$$V^I = g_1 a_1 A_a^\dagger A_b e^{-iJt} + g_2 a_2 A_b^\dagger A_c e^{iJt} + H.C., \quad (2)$$

其中 g_1 是原子与场耦合常数, $a_1(a_2)$, $a_1^\dagger(a_2^\dagger)$ 为模1(模2)的消灭,产生算符。 A_i , A_i^\dagger 是原子对应能级的消灭,产生算符。

令 ρ_f 表示场密度矩阵, $\rho_{n_1, n_2; m_1, m_2}$ 为它的矩阵元, $\rho_{\alpha, \beta; n_1, n_2; m_1, m_2}$ 为原子和场总系统的密度矩阵元,则

$$\dot{\rho}_f = \dot{\rho}_f^{(a)} + \dot{\rho}_f^{(b)} + \dot{\rho}_f^{(c)}, \quad (3)$$

其中 $\dot{\rho}_f^{(a)}$ 表示由于对 $|a\rangle$ 能级的泵浦而引起的场密度算符的变化率。它的对角矩阵元的变化率为^[3~5]

$$\dot{\rho}_{n_1, n_2, n_1, n_1}^{(\alpha)}(t) = R_\alpha \int d\tau \gamma e^{-\gamma\tau} (\sum_{\beta} \rho_{\beta, n_1, n_2, \beta, n_1, n_1}^{(\alpha)}(t+\tau) - \rho_{n_1, n_2, n_1, n_1}(t)), \quad (4)$$

其中 R_α 为处于 $|\alpha\rangle$ 能级的原子注入率, $\alpha, \beta = a, b, c$ 。

按照与文献[3, 4]完全相类似的计算, 可得运动主方程

$$\begin{aligned} \dot{p}(n_1, n_2) = & \frac{-A_1(n_1+1)p(n_1, n_2)}{1+\delta^2 + \frac{B_1}{A_1}(n_1+1) + \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)} + \frac{A_1 n_1 p(n_1-1, n_2)}{1+\delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)} \\ & \frac{\frac{3}{4} A_1(n_1+1) \frac{B_2}{A_2}(n_2+1) \left[1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1}(n_1+1) + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)\right] p(n_1, n_2)}{\left[1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1}(n_1+1) + \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)\right] \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1}(n_1+1) + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)\right)^2 + \delta^2\right]} \\ & + \frac{\frac{3}{4} A_1 n_1 \frac{B_2}{A_2} n_2 \left[1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} n_2\right]}{\left[1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2} n_2\right] \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} n_2\right)^2 + \delta^2\right]} p(n_1-1, n_2-1) \\ & - \frac{A_1' n_1 p(n_1, n_2)}{1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)} + \frac{A_1'(n_1+1)p(n_1+1, n_2)}{1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1}(n_1+1) + \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)} \\ & - \frac{A_2'(n_2+1)p(n_1, n_2)}{1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)} + \frac{A_2' n_2 p(n_1, n_2-1)}{1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2} n_2} \\ & - \frac{A_2 n_2 p(n_1, n_2)}{1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2} n_2} + \frac{A_2(n_2+1)p(n_1, n_2+1)}{1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)} \\ & - \frac{\frac{3}{4} A_2 n_2 \frac{B_1}{A_1} n_1 \left[1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} n_2\right]}{\left[1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2} n_2\right] \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} n_2\right)^2 + \delta^2\right]} p(n_1, n_2) \\ & + \frac{\frac{3}{4} A_2(n_2+1) \frac{B_1}{A_1}(n_1+1) \left[1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1}(n_1+1) + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)\right]}{\left[1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1}(n_1+1) + \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)\right] \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1}(n_1+1) + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)\right)^2 + \delta^2\right]} \\ & \times p(n_1+1, n_2+1), \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } A_1 = 2R_a \left| \frac{g_1}{\gamma} \right|^2, \quad A_2 = 2R_c \left| \frac{g_2}{\gamma} \right|^2, \quad A_1' = 2R_b \left| \frac{g_1}{\gamma} \right|^2, \quad A_2' = 2R_b \left| \frac{g_2}{\gamma} \right|^2,$$

$$\frac{B_1}{A_1} = 4 \left| \frac{g_1}{\gamma} \right|^2, \quad \frac{B_2}{A_2} = 4 \left| \frac{g_2}{\gamma} \right|^2, \quad \delta = \frac{\Delta}{\gamma}, \quad p(n_1, n_2) = \rho_{n_1, n_2, n_1, n_1}(t).$$

关于主方程(5)式的一些讨论, 完全与文献[3, 4]类似。特别应指出的是, (5)式右边的第3、4、11、12项是与双光子过程有关的项。在文献[4]中指出偏调将增加双光子项的作用。本文主要考虑偏调量对激光运转的影响。

三、关于偏调量 Δ 作用的讨论

在单模运转中, 激光输出随偏调量的增加而单调地下降。在三能级双模激光系统中就不那么简单, 会出现一些特别的情况。我们主要将集中讨论模 1 的增益系数与偏调量的关系。

由(5)式可得

$$\begin{aligned}
 \dot{p}(n_1) = & \sum_{n_2} \dot{p}(n_1, n_2) = -A_1(n_1+1) \sum_{n_1} \frac{p(n_1, n_2)}{1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1}(n_1+1) + \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)} \\
 & + A_1 n_1 \sum_{n_1} \frac{p(n_1-1, n_2)}{1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2}(n_2+1)} \\
 & - \sum_{n_1} \frac{\frac{3}{4} A_1 \frac{B_2}{A_2} (n_1+1)(n_2+1) \left[1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} (n_1+1) + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} (n_2+1) \right] p(n_1, n_2)}{\left[1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} (n_1+1) + \frac{B_2}{A_2} (n_2+1) \right] \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} (n_1+1) + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} (n_2+1) \right)^2 + \delta^2 \right]} \\
 & + \sum_{n_1} \frac{\frac{3}{4} A_1 \frac{B_2}{A_2} n_1 n_2 \left[1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} (n_1+1) + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} (n_2+1) \right]}{\left[1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2} n_2 \right] \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} n_2 \right)^2 + \delta^2 \right]} p(n_1-1, n_2-1) \\
 & - A_1' n_1 \sum_{n_1} \frac{p(n_1, n_2)}{1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2} (n_2+1)} \\
 & + A_1' (n_1+1) \sum_{n_1} \frac{p(n_1+1, n_2)}{1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} (n_1+1) + \frac{B_2}{A_2} (n_2+1)} \\
 & - \sum_{n_2} \frac{\frac{3}{4} A_2 \frac{B_1}{A_1} n_1 n_2 \left[1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} n_2 \right]}{\left[1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{B_2}{A_2} n_2 \right] \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} n_1 + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} n_2 \right)^2 + \delta^2 \right]} p(n_1, n_2) \\
 & + \sum_{n_2} \frac{\frac{3}{4} A_2 \frac{B_1}{A_1} (n_1+1)(n_2+1) \left[1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} (n_1+1) + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} (n_2+1) \right]}{\left[1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} (n_1+1) + \frac{B_2}{A_2} (n_2+1) \right] \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} (n_1+1) + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} (n_2+1) \right)^2 + \delta^2 \right]} \\
 & \times p(n_1+1, n_2+1)。 \tag{6}
 \end{aligned}$$

考虑 $R_0 = 0$, 即 $A_1' = A_2' = 0$ 的情况, 并作退关联近似, 即 $\langle n_1^a n_2^b \rangle = \langle n_1 \rangle^a \langle n_2 \rangle^b$, 由(6)式可得

$$\frac{d\langle n_1 \rangle}{dt} = \sum_{n_1} n_1 \dot{p}(n_1) = \frac{A_1 \langle n_1 \rangle}{1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} \langle n_1 \rangle + \frac{B_2}{A_2} \langle n_2 \rangle}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{3}{4} \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle A_1 \frac{B_2}{A_2} \left[1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} \langle n_1 \rangle + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} \langle n_2 \rangle \right]}{\left[1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} \langle n_1 \rangle + \frac{B_2}{A_2} \langle n_2 \rangle \right] \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} \langle n_1 \rangle + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} \langle n_2 \rangle \right)^2 + \delta^2 \right]} \\
& - \frac{\frac{3}{4} \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle A_2 \frac{B_1}{A_1} \left[1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} \langle n_1 \rangle + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} \langle n_2 \rangle \right]}{\left[1 + \delta^2 + \frac{B_1}{A_1} \langle n_1 \rangle + \frac{B_2}{A_2} \langle n_2 \rangle \right] \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{B_1}{A_1} \langle n_1 \rangle + \frac{1}{4} \frac{B_2}{A_2} \langle n_2 \rangle \right)^2 + \delta^2 \right]} \quad (7)
\end{aligned}$$

因此, 模 1 的增益系数为

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{\langle n_1 \rangle} \frac{d \langle n_1 \rangle}{dz} \\
&= \frac{\frac{A_1}{c}}{1 + \delta^2 + K_1 + K_2} + \frac{A_1}{c} \frac{\frac{3}{4} K_2 \left(1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{1}{4} K_1 + \frac{1}{4} K_2 \right) \left(1 - \frac{R_c}{R_0} \right)}{\left(1 + \delta^2 + K_1 + K_2 \right) \left[\left(1 + \frac{1}{4} K_1 + \frac{1}{4} K_2 \right)^2 + \delta^2 \right]} \quad (8)
\end{aligned}$$

其中 c 为光速, $K_1 = \frac{B_1}{A_1} \langle n_1 \rangle$, $K_2 = \frac{B_2}{A_2} \langle n_2 \rangle$ 。如模 2 是外来入射的强激光, 而模 1 为受激发射的激光(文献[1]中的情况), 可以假定 $K_1 \ll 1$, (8)式可简化为

$$G = \frac{A_1}{c} \left[\frac{1}{1 + \delta^2 + K_2} - \frac{\frac{3}{4} J K_2 \left(1 + \frac{1}{3} \delta^2 + \frac{K_2}{4} \right)}{\left(1 + \delta^2 + K_2 \right) \left[\left(1 + \frac{K_2}{4} \right)^2 + \delta^2 \right]} \right] \quad (9)$$

其中 $J = (R_c/R_0) - 1$ 。增益系数 G 将随 δ 的变化而变化。首先 $\delta = 0$ 时, $(\partial G/\partial \delta) = 0$, 因此必是一个极值点。再者, 当 $\delta \rightarrow \infty$ 时, $G \rightarrow 0$ 。为了进一步考察 G 曲线的特点, 我们取 G 的一阶导数

$$\begin{aligned}
\frac{c}{A_1} \frac{\partial G}{\partial \delta^2} &= \frac{\left(1 - \frac{J K_2}{4} \right) (1 + \delta^2 + K_2) \left[\left(1 + \frac{K_2}{4} \right)^2 + \delta^2 \right]}{\left(1 + \delta^2 + K_2 \right)^2 \left[\left(1 + \frac{K_2}{4} \right)^2 + \delta^2 \right]^2} \\
&= \frac{\left[\left(1 + \frac{K_2}{4} \right)^2 - \frac{3 J K_2}{4} \left(1 + \frac{K_2}{4} \right) + \left(1 - \frac{J K_2}{4} \right) \delta^2 \right] \left[(1 + K_2) + \left(1 + \frac{K_2}{4} \right)^2 + 2 \delta^2 \right]}{\left(1 + \delta^2 + K_2 \right)^2 \left[\left(1 + \frac{K_2}{4} \right)^2 + \delta^2 \right]^2} \quad (10)
\end{aligned}$$

令 $\frac{\partial G}{\partial \delta^2} = 0$, 得下面的方程

$$\delta^4 + b \delta^2 + c = 0, \quad (11)$$

$$b = \frac{2 \left(1 + \frac{K_2}{4} \right) \left(1 + \frac{K_2}{4} - \frac{3 J K_2}{4} \right)}{1 - \frac{J K_2}{4}}, \quad (12)$$

$$c = \frac{\left(1 + \frac{K_2}{4} \right)^4 - \frac{3 J K_2}{4} \left(1 + \frac{K_2}{4} \right)^3 + \frac{J K_2}{4} (1 + K_2) \left(1 + \frac{K_2}{4} \right)^2 - \frac{3 J K_2}{4} (1 + K_2) \left(1 + \frac{K_2}{4} \right)}{1 - \frac{J K_2}{4}} \quad (13)$$

同时注意到, 当

$$\delta^2 = \frac{\left(1 + \frac{K_2^2}{4}\right) \left[\frac{3JK_2}{4} - \left(1 + \frac{K_2}{4}\right)\right]}{1 - \frac{JK_2}{4}} \quad (14)$$

时, $G=0$ 。当 $\delta=0$ 时, 增益系数为

$$G_{\delta=0} = \frac{A_1}{c} \cdot \frac{1 + \frac{K_2}{4} - \frac{3JK_2}{4}}{\left(1 + K_2\right) \left(1 + \frac{K_2}{4}\right)} \quad (15)$$

下面分几种情况来讨论。

$$1. J > 0, \left(1 - \frac{JK_2}{4}\right) < 0,$$

$$\left(1 + \frac{K_2}{4} - \frac{3JK_2}{4}\right) > 0.$$

由(12), (13)式可知, $b < 0, d < 0$ 。由(11)式可知 δ^2 有一个大于零的解(另一个小于零的解无意义)。它对应于 $G-\delta^2$ 曲线的一个极值, 对应于 $G-\delta$ 曲线的二个极值, 再加上 $\delta=0$ 处的极值点, 共有三个极值点。由(15)式可知

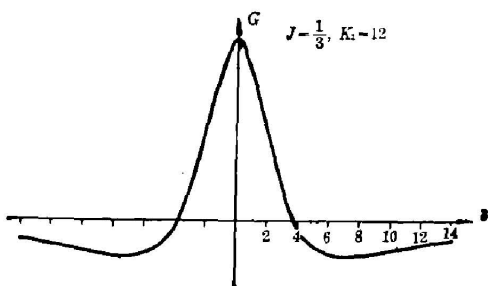


图2 增益-偏调曲线

Fig. 2 Gain vs intermediate level detuning

$G_{\delta=0} > 0$ 。由(14)式可知 $G-\delta$ 曲线与横坐标轴(δ 轴)有交点。再考虑到 $\delta \rightarrow \infty$ 时, $G \rightarrow 0$, 因此 $\delta=0$ 点必是极大值点, 另二个为极小值点。基本图形如图2所示。

$$2. J > 0, \left(1 - \frac{JK_2}{4}\right) < 0, \left(1 + \frac{K_2}{4} - \frac{3JK_2}{4}\right) < 0.$$

在这样的条件下, 由(14)式可知, 曲线与 δ 轴无交点。由(15)式可知 $G_{\delta=0} < 0$ 。基本图形有二种, 如图3(a)和3(b)所示。

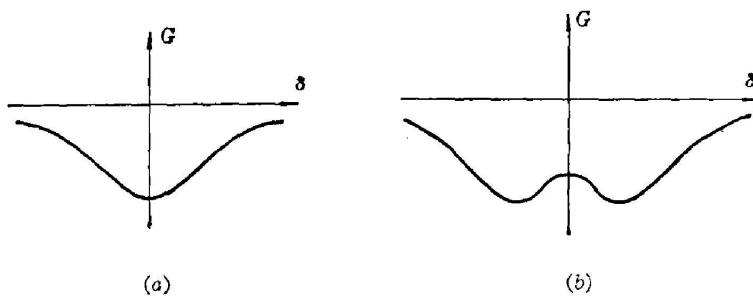


图3 增益-偏调曲线

Fig. 3 Gain vs intermediate level detuning

$$3. J > 0, \left(1 - \frac{JK_2}{4}\right) > 0, \left(1 + \frac{K_2}{4} - \frac{3JK_2}{4}\right) < 0.$$

此时 b 和 d 都小于零, δ^2 有一个大于零的解。类似上面的讨论得 $G-\delta$ 曲线有三个极值点, 与 δ 轴有二个交点。 $\delta=0$ 为极小值, 另二个为极大值, 如图4所示。

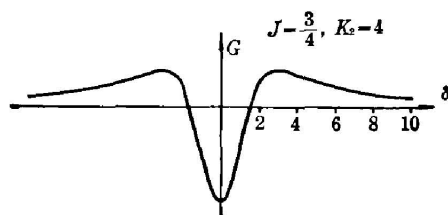


图 4 增益-偏调曲线

Fig. 4 Gain vs intermediate level detuning

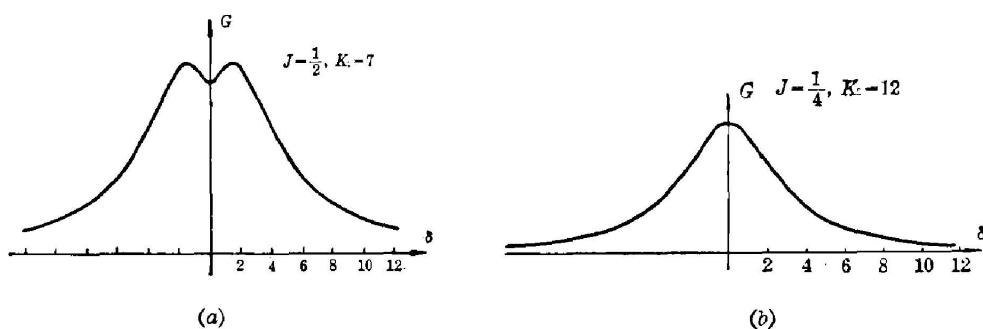


图 5 增益-偏调曲线

Fig. 5 Gain vs intermediate level detuning

$$4. J > 0, \left(1 - \frac{JK_2}{4}\right) > 0, \left(1 + \frac{K_2}{4} - \frac{3JK_2}{4}\right) > 0.$$

曲线与 δ 轴无交点, 并且 $G_{\delta=0} > 0$ 。如 $K_2 > 8$, 则只有一个极值点, 其图形如图 5a 所示。如 $K_2 < 8$, 则可能有三个极值点, 如图 5(b) 所示。

$$5. J \leq 0.$$

在这样的条件下, b 和 d 都为正。因此 δ^2 没有大于零的解。 $G-\delta$ 曲线只有一个极值点, 在 $\delta=0$ 处。由 (15) 式可知此极值点为极大值点, 其图形如图 6 所示。

一般模 2 的强度在介质中的不同位置有不同的值, 首先模 2 在传播过程中强度发生改变。再例如模 2 是经过透镜会聚入工作物质, 类似文献 [1] 实验中的情况。该实验中模 2 还是一个泵浦光, 因此 J 与 K_2 有关。 K_2 越大, J 越小。因此总增益是以上讨论中某几种情况的总合。

对于一般的情况, 可由 (5) 式得一与 (7) 式类似的关于模 2 平均光子数的运动方程。与 (7) 式联立, 在任意给定的初条件下, 可由计算机求出模 1 和模 2 的平均光子数。下一步我们将进行这方面的工作。

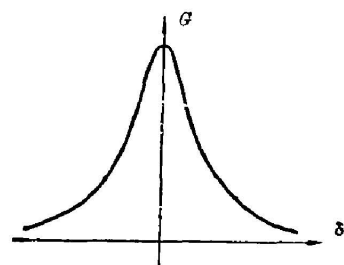


图 6 增益-偏调曲线

Fig. 6 Gain vs intermediate level detuning

参 考 文 献

- [1] B. Nikolaus, D. Z. Zhang *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**, No. 3 (20 Jul), 171.
 [2] E. Giacobino, M. Devaud *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **45**, No. 6 (11 Aug), 434.

- [3] S. Y. Chu, D. C. Su; *Phys. Rev. (A)*, 1982, **25**, No. 6 (Jun), 3169.
[4] 朱诗尧;《光学学报》, 1983, **3**, No. 5 (Aug), 395
[5] M. Sargent *et al.*; *Laser Physics*, (Addison-Wesley Pub. Comp. Inc., 1974)

Theoretical study on two-photon resonance amplifier

ZHU SHIYAO

LI RUIYONG

(*Institute of Scientific and Technical Information, Shanxi Province, Taiyuan*, (*Shanghai Institute of Laser Technology*))

(Received 6 December 1982, revised 7 February 1983)

Abstract

The master equation of a three-level atomic system interacting with a two-mode field at two-photon resonance is given. The two-photon gain coefficient formula is deduced. The curve of gain coefficient versus detuning with respect to the intermediate level is discussed.