

确定平板光波导折射率的简便方法

金 锋

(中国科学院长春物理研究所)

提 要

本文提出了由模折射率确定平板光波导薄膜折射率的简便方法,即解析法和外推法。这两种方法均给出薄膜折射率与若干模折射率的线性关系式。因此,在未知薄膜厚度和衬底折射率的情形下,只经简单的四则运算,就能较准确地确定薄膜折射率。

一、引 言

在集成光学中,由波导参数(折射率分布和横截面尺寸)确定本征值(纵向传播常数或模折射率),和由本征值确定波导参数,是两类重要研究课题。但是,其绝大多数课题涉及超越本征值方程,需经复杂运算才能求得数值解,因此有必要探索简便运算方法。

利用棱镜耦合器测量模折射率,确定平板波导的薄膜参数(折射率和厚度),是导波光学技术在物理学中的重要应用,并为介质薄膜工艺提供了一个新的高精度测试手段。对此,Ulrich 和 Torge^[1] 及 Kirsch^[2] 分别提出了相应的计算方法。但是,这些方法均要通过联立的超越本征值方程,进行复杂的迭代和统计运算,故必须采用电子计算机。

为了简化其运算过程,本文提出了两种简便运算方法,它们只涉及简单的四则运算,可供手算。

二、解 析 法

平板波导的剖面结构如图1所示。其中, n_f 、 n_s 和 n_c 分别为薄膜、衬底和包层的折射率,且 $n_f > n_s \geq n_c$; d 为薄膜厚度。于是,平板波导的本征值方程可表示为^[1,3]

$$(n_f^2 - N_v^2)^{1/2} k d = \nu \pi + \phi_s + \phi_c, \quad (1)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \phi_s &= \tan^{-1} \left(\frac{n_f}{n_s} \right)^{2\alpha} \left(\frac{N_v^2 - n_s^2}{n_f^2 - N_v^2} \right)^{1/2}, \\ \phi_c &= \tan^{-1} \left(\frac{n_f}{n_c} \right)^{2\alpha} \left(\frac{N_v^2 - n_c^2}{n_f^2 - N_v^2} \right)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$k = 2\pi/\lambda$ 和 λ 分别为光波在真空中的传播常数和波长; $\nu = 0, 1, 2, \dots, m$ 为模阶数; $m+1$ 为模式数

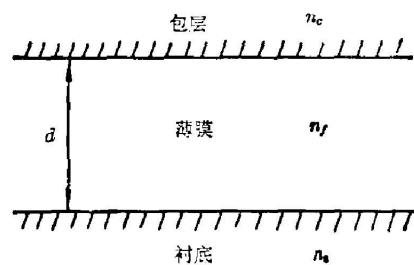


图1 平板波导剖面结构示意图
Fig. 1 Cross-section structure of the planar waveguide

量; N_ν 为 ν 阶模的模折射率; $\alpha=0$ 和 1 分别对应于 TE 模和 TM 模。

据(1)式, 利用关系式

$$\phi_s = (\pi/2) - \tan^{-1}(1/\tan \phi_s), \quad \phi_e = (\pi/2) - \tan^{-1}(1/\tan \phi_e), \quad (3)$$

推得

$$N_\nu = n_f [1 - (\nu+1)^2 y_\nu^2]^{1/2}, \quad (4)$$

式中

$$y_\nu = (n_f^2 - N_\nu^2)^{1/2} / n_f (\nu+1) = 1/2n_f D_\nu, \quad (5)$$

$$D_\nu = \frac{d}{\lambda} + \frac{\tan^{-1}(1/\tan \phi_s) + \tan^{-1}(1/\tan \phi_e)}{2\pi(n_f^2 - N_\nu^2)^{1/2}}. \quad (6)$$

对于集成光学中常用的波导参数, 如下条件成立:

$$(\nu+1)^2 y_\nu^2 = (n_f^2 - N_\nu^2) / n_f^2 \ll 1. \quad (7)$$

并且, 由表 1 中的波导参数及其 N_ν 值可以验证, y_ν 随 ν 的变化很小, 可近似地视作与 ν 无关的参数 y 。因此, 根据(4)式, N_ν 可展成 y 的幂级数

$$N_\nu = n_f \left[1 - \frac{1}{2} (\nu+1)^2 y^2 - \frac{1}{8} (\nu+1)^4 y^4 - \frac{1}{16} (\nu+1)^6 y^6 - \frac{5}{128} (\nu+1)^8 y^8 - \frac{7}{256} (\nu+1)^{10} y^{10} - \frac{21}{1024} (\nu+1)^{12} y^{12} - \dots \right]. \quad (8)$$

在(8)式中, 令 $\nu=0, 1, 2, \dots$, 得到有关 N_ν 的一系列方程。在 $\nu=0$ 和 1 的两个方程中, 消去 y^2 项, 可得由 N_0 和 N_1 决定的 n_f 的近似, 记作 $n_a^{(1)}$ 。在 $\nu=0, 1$ 和 2 的三个方程中, 消去 y^2 和 y^4 项, 可得由 N_0, N_1 和 N_2 决定的 n_f 的近似, 记作 $n_a^{(2)}$ 。以此类推, 在 $\nu=0, 1, 2, \dots, j$ 的 $j+1$ 个方程中, 消去 $y^2, y^4, y^6, \dots, y^{2j}$ 项, 可得由 0 到 j 阶模的模折射率 ($N_0, N_1, N_2, \dots, N_j$) 决定的 n_f 的近似, 记作 $n_a^{(j)}$ 。按此解析法可推得薄膜折射率的一组简单公式, 即 $n_a^{(j)}$ 的线性表达式和 $n_a^{(j)}$ 的相对偏差 $\Delta_a^{(j)} = (n_a^{(j)} - n_f) / n_f$:

$$\left. \begin{aligned} n_a^{(1)} &= (1/3) (4 N_0 - N_1) \\ n_a^{(2)} &= (1/10) (15 N_0 - 6 N_1 + N_2) \\ n_a^{(3)} &= (1/35) (56 N_0 - 28 N_1 + 8 N_2 - N_3) \\ n_a^{(4)} &= (1/126) (210 N_0 - 120 N_1 + 45 N_2 - 10 N_3 + N_4) \\ n_a^{(5)} &= (1/462) (792 N_0 - 495 N_1 + 220 N_2 - 66 N_3 + 12 N_4 - N_5) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_a^{(1)} &= + \left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{5}{4} y^4 + \dots \right) \\ \Delta_a^{(2)} &= - \left(\frac{9}{4} y^4 + \frac{315}{16} y^6 + \dots \right) \\ \Delta_a^{(3)} &= + \left(\frac{45}{2} y^6 + 315 y^8 + \dots \right) \\ \Delta_a^{(4)} &= - \left(\frac{1575}{4} y^8 + \frac{259875}{16} y^{10} + \dots \right) \\ \Delta_a^{(5)} &= + \left(\frac{42525}{4} y^{10} + \dots \right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中, 下标 a 表示这些量由解析法确定。

三、外 推 法

由于 ν 取从 0 到 m 的正整数, 所以根据(1)式 N_ν 在 n_s 到 n_f 的范围内取 $m+1$ 个离散值, 使 N_ν 成为 ν 的离散函数。若 ν 取连续的正负实数, 则 N_ν 成为 ν 的连续函数。于是, 在(1)式中, 令 $N_\nu = n_f$, 得 $\nu = -1$, 故薄膜折射率可表为

$$n_f = N_{\nu=-1} \quad (11)$$

这就意味着, 将 N_ν 与 ν 的函数关系外推到 $\nu = -1$, 能够求得薄膜折射率。在图 2 中, 对于给定的一组波导参数, 画出 TE 模的 $N_\nu \sim \nu$ 曲线, 并把它外推到 $\nu = -1$, 就对应于 n_f 。

在 $N_\nu \sim \nu$ 曲线上, 与任意 ν 相对应的 N_ν , 可由以 $\nu = 0, 1, 2, \dots, m$ 为结点的牛顿插值公式给出:

$$N_\nu = N_0 + \sum_{n=1}^m \frac{\sum_{l=1}^n (\nu-l+1)}{n!} \Delta^n N_0, \quad (12)$$

式中, $n = 1, 2, 3, \dots, m; l = 1, 2, 3, \dots, n; \Delta^n N_0$ 为 N_ν 对 ν 的 n 阶差分, 可表示为

$$\Delta^n N_0 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} C_n^k N_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

根据(11)式, 在(12)式中, 令 $\nu = -1$, 将求和号的上限 m 由 j 代替, 可得由 0 到 j 阶模的模折射率($N_0, N_1, N_2, \dots, N_j$)决定的 n_f 的外推公式

$$n_f = N_0 + \sum_{n=1}^j (-1)^n \Delta^n N_0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m_0 \quad (14)$$

将(13)式代入(14)式, 推得薄膜折射率的另一组简单公式(相应地用 $n_e^{(j)}$ 表示), 即 $n_e^{(j)}$ 的线性表达式和 $n_e^{(j)}$ 的相对偏差 $\Delta_e^{(j)} = (n_e^{(j)} - n_f) / n_f$:

$$\left. \begin{aligned} n_e^{(1)} &= 2N_0 - N_1 \\ n_e^{(2)} &= 3N_0 - 3N_1 + N_2 \\ n_e^{(3)} &= 4N_0 - 6N_1 + 4N_2 - N_3 \\ n_e^{(4)} &= 5N_0 - 10N_1 + 10N_2 - 5N_3 + N_4 \\ n_e^{(5)} &= 6N_0 - 15N_1 + 20N_2 - 15N_3 + 6N_4 - N_5 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_e^{(1)} &= + \left(y^2 + \frac{7}{4} y^4 + \dots \right) \\ \Delta_e^{(2)} &= - \left(\frac{9}{2} y^4 + \frac{135}{2} y^6 + \dots \right) \\ \Delta_e^{(3)} &= + \left(3y^4 + \frac{195}{2} y^6 + \dots \right) \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

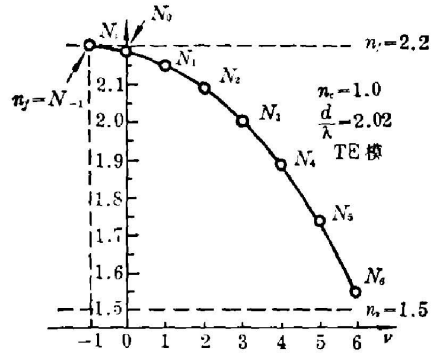


图 2 平板波导的 $N_\nu \sim \nu$ 曲线
Fig. 2 $N_\nu \sim \nu$ curve of the planar waveguide

$$\left. \begin{aligned} \Delta_e^{(4)} &= -\left(\frac{225}{2}y^6 + \frac{39375}{8}y^8 + \dots\right) \\ \Delta_e^{(5)} &= +\left(45y^6 + \frac{29925}{4}y^8 + \dots\right) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\}$$

式中, 下标 e 表示这些量由外推法确定。

四、准 确 度

(9)式和(15)式, 均是薄膜折射率与若干模折射率的线性关系式, 这比通过超越本征值方程的隐函数关系简单。因此, 用这两个公式, 就可以显著简化确定薄膜折射率的运算过程。

表1 对应于不同波导参数的 N_v 、 y 、 $n_a^{(j)}$ 和 $n_e^{(j)}$ 的理论值 ($n_c=1$)

Table 1 Theoretical values of N_v 、 y 、 $n_a^{(j)}$ and $n_e^{(j)}$ corresponding to various parameters of the waveguide ($n_c=1$)

编 号		No. 1	No. 2	No. 3	No. 4
波 导 参 数	n_f	2.2	1.6	1.51	1.6
	n_s	1.5	1.5	1.50	1.5
	d/λ	2.0194517	5.8371714	18.732685	1.8
模 数 和 偏 振		7 个 TE 模	7 个 TE 模	7 个 TE 模	2 个 TE 模
N_v	N_0	2.1882300	1.5979998	1.5097886	1.58410
	N_1	2.1526036	1.5919923	1.5091555	1.53763
	N_2	2.0921333	1.5819609	1.5081027	
	N_3	2.0050461	1.5678858	1.5066355	
	N_4	1.8885947	1.5497711	1.5047647	
	N_5	1.7389754	1.5277419	1.5025181	
y		1.0×10^{-1}	5.0×10^{-2}	1.7×10^{-2}	1.4×10^{-1}
$n_a^{(j)}$	$n_a^{(1)}$	2.200105	1.600002	1.510000	1.59959
	$n_a^{(2)}$	2.199996	1.600000	1.510000	
	$n_a^{(3)}$	2.200000	1.600000	1.510000	
	$n_a^{(4)}$	2.200000	1.600000	1.510000	
	$n_a^{(5)}$	2.200000	1.600000	1.510000	
$n_e^{(j)}$	$n_e^{(1)}$	2.223856	1.604007	1.510422	1.63057
	$n_e^{(2)}$	2.199013	1.599983	1.510002	
	$n_e^{(3)}$	2.200786	1.600003	1.509997	
	$n_e^{(4)}$	2.199811	1.600027	1.510002	
	$n_e^{(5)}$	2.199893	1.599930	1.509991	

由(10)式和(16)式看到, $n_a^{(j)}$ 和 $n_e^{(j)}$ 的准确度, 随 j 的增加而提高, 但随 y 的增加而降低; 并且, 对于同一个 j , $n_a^{(j)}$ 的准确度优于 $n_e^{(j)}$ 。为了看清准确度与波导参数之间关系, 对于最高阶模 ($\nu = m$), 在(5)式中, 由 n_s 代替 N_m , 可得

$$y \approx (n_f^2 - n_s^2)^{1/2} / n_f (m+1)。 \quad (17)$$

这就说明, $n_a^{(j)}$ 和 $n_e^{(j)}$ 的准确度, 随模式数量 $m+1$ 的增加而提高, 但随薄膜与衬底折射率差别 $(n_f - n_s) / n_f$ 的增加而降低。

现从 y 的取值范围来讨论准确度。由(10)式和(16)式容易看到, 当 $y = 0.1$ 时, 除了 $n_e^{(1)}$ 的偏差取 10^{-3} 以外, 其余 $n_a^{(j)}$ 和 $n_e^{(j)}$ 的偏差取 10^{-4} 或更小的数量级。这样高的准确度是令人满意的, 且与薄膜折射率的测量精度相适应。因此, 当 $y \leq 0.1$ 时, 除 $n_e^{(1)}$ 以外, $n_a^{(j)}$ 和 $n_e^{(j)}$ 均可用于实际测量。但是, 对于 $y > 0.1$ 的情形, 应适当选择 j , 以使 $n_a^{(j)}$ 和 $n_e^{(j)}$ 的偏差降至同测量精度相匹配时, 方可使用。至于 $n_e^{(1)}$ 的偏差仅在 $y < 0.03$ 时, 才能取 10^{-4} 或更小的数量级, 而在多数情形下取 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 数量级, 故不能使用。

为了检验 $n_a^{(j)}$ 和 $n_e^{(j)}$ 的准确度, 在 $y = 10^{-1} \sim 10^{-2}$ 范围内, 选择 5 组波导参数。对此, 由(1)式求出 N_ν , 把它们代入(9)式和(15)式, 分别计算出 $n_a^{(j)}$ 和 $n_e^{(j)}$ 。这些计算结果同波导参数、模式数量、偏振态和 y 值一起列入表 1。其中, 对于 1 到 3 组波导参数, N_ν 的计算精度小于 10^{-6} ; 对于 4 组波导参数, N_ν 的计算精度小于 10^{-5} 。

在表 1 中, 将 $n_a^{(j)}$ 和 $n_e^{(j)}$ 同 n_f 相比较可以看到: (1) $n_a^{(j)}$ 的偏差除在 5 组波导参数(双模情形)取 2.5×10^{-4} 以外, 均取 10^{-5} 或更小的数量级; (2) 除了 $n_e^{(1)}$ 的偏差取 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 以外, 其余 $n_e^{(j)}$ 的偏差均取 10^{-4} 或更小的数量级; (3) 对于同一个 j , $n_a^{(j)}$ 的偏差比 $n_e^{(j)}$ 小几个数量级。这就进一步证明了上述准确度的估计。

五、在测量中的应用

若用棱镜耦合器测得模折射率 \bar{N}_ν , 则由(9)式或(15)式均可求得薄膜折射率

$$n_f^{(j)} = n_a^{(j)} \quad \text{或} \quad n_e^{(j)}。 \quad (18)$$

设其绝对误差为 $\Delta n_f^{(j)}$, 则相对误差 $\Delta_f^{(j)} = \Delta n_f^{(j)} / n_f^{(j)}$ 可表示为

$$\Delta_f^{(j)} = |\Delta_c^{(j)}| + |\Delta_N^{(j)}|, \quad (19)$$

式中, $\Delta_c^{(j)}$ 和 $\Delta_N^{(j)}$ 分别为 $n_a^{(j)}$ 或 $n_e^{(j)}$ 的计算偏差和模折射率的测量误差 ΔN_ν 对于相对误差所作的贡献。 $\Delta_c^{(j)}$ 可由(10)式或(16)式给出:

$$\Delta_c^{(j)} = \Delta_a^{(j)} \quad \text{或} \quad \Delta_e^{(j)}。 \quad (20)$$

$\Delta_N^{(j)}$ 可根据(9)式或(15)式, 由线性函数的误差传递理论确定。在(18)~(20)式中, 上标 (j) 的意义同前。

根据(18)式, 由(9)式或(15)式, $n_f^{(j)}$ 可统一写作

$$n_f^{(j)} = \sum_{\nu=0}^j a_\nu \bar{N}_\nu, \quad (21)$$

式中, a_ν 为 \bar{N}_ν 的展开系数。忽略各模折射率测量之间的相关性, 由(21)式可得^[4]

$$\Delta_N^{(j)} = \left[\sum_{\nu=0}^j a_\nu^2 (\Delta N_\nu)^2 \right]^{1/2} / n_f^{(j)}。 \quad (22)$$

若各模折射率的测量误差接近相同, $\Delta N_\nu \approx \Delta N$, 则(22)式可简化为

$$\Delta N^{(j)} = \left[\sum_{\nu=0}^j a_\nu^2 \right]^{1/2} \Delta N / n_\nu^{(j)}. \quad (23)$$

很明显, 对于相同的 ν 和 ΔN_ν , 由于(9)式中的 a_ν 小于(15)式中相应的展开系数, 所以解析法的 $\Delta N^{(j)}$ 小于外推法。

对于给定的测量系统和波导样品, ΔN 和 $\Delta N^{(j)}$ 有一个最小极限。因此, 当使用解析法或外推法时, 为了降低薄膜折射率的测量误差, 应把 $\Delta n_\nu^{(j)}$ 减小到与 $\Delta N^{(j)}$ 相适应的程度。这个条件可写作 $\Delta n_\nu^{(j)} \leq \Delta N^{(j)}$ 。在一般情况下, 适当选择 j 这一条件是容易得到满足的。

以在 K_9 玻璃衬底 ($n_s = 1.51730$) 上的 BaK_7 玻璃波导^[5]和在石英衬底 ($n_s = 1.45707$) 上的 Al_2O_3 波导^[4]为例, 现用解析法确定其薄膜折射率。 BaK_7 波导测量是我们过去的工作。这一波导样品具有三个 TE 模, 其模折射率是在 He-Ne 激光波长 (6328 Å) 由 ZF₆ 玻璃棱镜和 20'' 精度的测角转盘测量的, 单次测量的最大误差约为 $\Delta N \approx 1.4 \times 10^{-4}$ 。 Al_2O_3 波导的测量数据引自文献[1]。

表 2 是由解析法和 Ulrich 方法处理的上述两个波导样品的测量数据。根据 \bar{N}_ν , 由(9)、(5)和(10)式分别计算出 $n_\nu^{(j)}$ 、 y 和 $\Delta n_\nu^{(j)}$, 由(22)式或(23)式计算出 $\Delta N^{(j)}$, 且由(19)式计算出 $\Delta n_\nu^{(j)}$ 。由表 2 看到, 解析法和 Ulrich 方法, 在其测量误差范围内, 给出相互一致的薄膜折射率。对于这两个波导样品, y 值均很小 ($\approx 6.9 \times 10^{-3}$), $\Delta n_\nu^{(j)}$ 与 $\Delta N^{(j)}$ 相比, 可以忽略不计。因此, 误差来源主要是模折射率的测量误差, 而不是解析法的计算偏差。

表 2 由解析法和 Ulrich 方法处理的两个波导样品的测量数据
Table 2 Measured data for two waveguide samples via processing of the analytics and Ulrich method

波 导 样 品	模折射率测量值 \bar{N}_ν	薄膜折射率测量值与误差		
		解 析 方 法		Ulrich 方法
		$n_\nu^{(j)}$	$\Delta n_\nu^{(j)}$	$n_\nu \pm \Delta n_\nu$
BaK ₇ 波导	$\bar{N}_0 = 1.55316$ $\bar{N}_1 = 1.54213$ $\bar{N}_2 = 1.52468$	$n_0^{(j)} = 1.55684$ $n_1^{(j)} = 1.55693$	$\Delta n_0^{(j)} = 2.0 \times 10^{-4}$ $\Delta n_1^{(j)} = 2.2 \times 10^{-4}$	$1.55696 \pm 1.7 \times 10^{-4}$
Al ₂ O ₃ 波导	$\bar{N}_0 = 1.625469$ $\bar{N}_1 = 1.613907$ $\bar{N}_2 = 1.593877$ $\bar{N}_3 = 1.567191$	$n_0^{(j)} = 1.62932$ $n_1^{(j)} = 1.62925$ $n_2^{(j)} = 1.62916$		$1.62921 \pm 2.3 \times 10^{-4}$

综上所述, 本文提出了由模折射率确定平板波导薄膜折射率的两种简便运算方法, 并在理论和实验上验证了其准确度, 可用于实际测量。这两个方法的突出优点是, 在未知衬底折射率和薄膜厚度的情形下, 只由若干模折射率作简单的四则运算, 就能准确地确定薄膜折射率。

参 考 文 献

[1] B. Ulrich and R. Torge; *Appl. Opt.*, 1973, 12, No. 12 (Dec), 2901.

- [2] S. T. Kirsch; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 12 (Jun), 2085.
[3] 金锋, 范俊清; 《集成光学》上册, (国防工业出版社 1981), 第 1 章。
[4] 肖明耀; 《实验误差估计与数据处理》, (科学出版社 1981), 第 4 章。
[5] 李玉善, 金锋; 《激光》, 1980, **7**, No. 1 (Jan), 42.

The simple methods for determining film refractive index of optical slab waveguides

JIN FENG

(Changchun Institute of Physics, Academia Sinica)

(Received 21 September 1982, revised 8 December 1982)

Abstract

Two simple calculation methods, i. e. analysis and extrapolation methods, for determining film refractive index of the optical slab waveguides have been presented in this paper. When the film thickness and substrate index are unknown, these methods can be used to determine film index accurately using the simple four fundamental operations of arithmetic based on linear dependence of the film index upon mode indices.