

# TEM<sub>np</sub> 模与空芯圆柱形 介质波导模的耦合系数

钟 权 德

(中国科学院物理研究所)

## 提 要

本文讨论了大半径空芯圆柱形介质波导中存在的线偏振模 EH<sub>1m</sub> 和 LP<sub>nm</sub> (n≥1) 的场分布, 后者是一对简并模的线性组合。然后, 我们计算了自由空间高斯-拉盖尔模 TEM<sub>np</sub> 与这些线偏振模的耦合系数, 得到的结果与已发表的实验资料符合得很好。我们还讨论了较小输入孔半径对光泵远红外激光器输出功率的影响。

## 一、引 言

Marcatili 和 Schmeltzer<sup>[1]</sup> 首先详细研究了空芯圆柱形介质波导模, 并提议在气体激光器中用介质波导做放电管同时兼传导光辐射, 从而充分利用增益与放电管半径成反比的关系。此后陆续制成了 He-Ne 波导激光器<sup>[2]</sup>, CO<sub>2</sub> 波导激光器<sup>[3]</sup>, ICN 和 HCN 远红外波导激光器<sup>[4, 5]</sup> 以及光泵远红外波导激光器<sup>[6]</sup> 等。总之, 介质波导已相当普遍地应用于可见至远红外区的激光器件中。

在用多通道远红外激光干涉测量大型托卡马克的等离子体电子密度时, 由于光路很长, 存在较大的光束偏离和发散效应。如果采用介质波导管传导远红外激光就可减少这些效应以缩小光学元件尺寸<sup>[7]</sup>。所以, 需要知道自由空间高斯模(在实际工作中它们往往是线偏振的)与空芯圆柱形介质波导模之间的耦合效率以及如何确保介质波导模 EH<sub>11</sub> 的激发。这对光泵远红外波导激光器中泵源功率的耦合问题也是有用的。

本文在半径远大于波长的假定下, 讨论空芯圆柱形介质波导内存在的线偏振模 EH<sub>1m</sub> 和 LP<sub>nm</sub> (n≥1) 的场分布, 得到的结果与 Degnan<sup>[8]</sup> 的结果相似, 我们还进一步指出这些场分布存在两组相互垂直偏振的模式。然后, 从理论上计算自由空间高斯-拉盖尔模 TEM<sub>np</sub> 与这些线偏振模的耦合系数, 从而说明如何得到这些模式的最佳激发以及讨论光泵远红外激光器的有关问题, 并且与已发表的实验资料相比较。

## 二、理 论

在圆柱形介质波导管内存在三种基本模式, 电力线与波导壁相切的圆电模 TE<sub>0m</sub>, 磁力线与波导壁相切的圆磁模 TM<sub>0m</sub> 以及经向与切向都有电场的混杂模 EH<sub>nm</sub>。这里 n 是正负

整数, 它的绝对值表示场结构的角向对称(即关于波导轴的旋转对称),  $m$  是正整数, 表示场在径向的最小值数目。为了得到这些模式的简化表示式, Marcatili 和 Schmeltzer<sup>[1]</sup> 采用了  $ka = 2\pi a/\lambda \gg |\nu|u_{nm}$  的假设。其中  $\lambda$  是波长,  $a$  是介质波导管半径,  $\nu$  是管壁材料的复折射率,  $u_{nm}$  是第  $(n-1)$  级贝塞耳函数的第  $m$  个根,  $J_{n-1}(u_{nm}) = 0$ 。并指出 EH<sub>1m</sub> 混杂模以及简并模(传播常数  $\gamma_{nm}$  相同的模式)的适当的线性联合形成的组合模基本上是线偏振的。Degnan<sup>[8]</sup> 建议用符号 LP(linearly polarized) 来代表它们。根据 Marcatili 和 Schmeltzer 在  $\lambda \ll a$  的进一步简化的假定下得到的场分布(文献[1]的(11)和(12)式), 得到在介质波导内存在的线偏振场分布有如下三种情况:

(1) EH<sub>1m</sub> 模是圆对称线偏振的, 可用符号 LP<sub>0m</sub> 代表它们。如果, 选择电场的偏振方向为  $Y$  轴, 则电场分量可表示为

$$Y_{0m} = \psi_{0m} e^{i(\gamma_{0m} z - \omega t)}, \quad \psi_{0m} = A_{0m} J_0(u_{1m} r/a). \quad (1)$$

(2) 当  $|n| \geq 2$  时, 简并模 EH<sub>1, n-1, m</sub> 与 EH<sub>1, n+2, m</sub> 的线性联合形成非圆对称线偏振模(可用符号 LP<sub>n, m</sub> 来代表它们)。这里新的  $n$  相当于原来  $n$  的取绝对值, 它表示场强的暗直径数。根据贝塞耳函数的性质, 经简单的数学分析容易证明  $n$  为奇数和  $n$  为偶数的线偏振模 LP<sub>n, m</sub> 的偏振方向是相互垂直的。它们的电场分量分别为

$$\left. \begin{aligned} & \text{LP}_{n, m} \text{ (当 } n=2k, k=1, 2, 3, \dots), \\ & \left. \begin{aligned} Y_{nm} &= \psi_{nm} e^{i(\gamma_{n+1, m} z - \omega t)}, \\ \psi_{nm} &= A_{nm} J_n(u_{n+1, m} r/a) \cos n\theta. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{LP}_{n, m} \text{ (当 } n=2k+1, k=1, 2, 3, \dots), \\ & \left. \begin{aligned} X_{nm} &= \psi_{nm} e^{i(\gamma_{n+1, m} z - \omega t)}, \\ \psi_{nm} &= A_{nm} J_n(u_{n+1, m} r/a) \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) 如果介质波导壁的复折射率  $\nu$  很接近于波导内部的折射率时, TE<sub>0m</sub> 模和 EH<sub>2m</sub> 模也是简并模。它们的线性联合形成的组合模也是线偏振的。容易证明, 它们的电场分量可由(3)式和用 LP<sub>1m</sub> 来代表。

(1), (2) 和 (3) 式中的  $A_{nm}$  是常数。它可由在波导截面上场强的归一化来决定,

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \psi_{nm} - \psi_{n'm'} \cdot r dr = \delta_{nn'} \cdot \delta_{mm'}$$

由此得到

$$A_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi a} J_1(u_{1m})}, & \text{当 } n=0, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi a} J_{n+1}(u_{n+1, m})}, & \text{当 } n \neq 0. \end{cases} \quad (4)$$

假讨论的系统具有布儒斯特窗或其它起偏元件[如 CO<sub>2</sub> 激光器中用光栅选频或远红外激光器中采用条形光栅(strip grating)反射器等], 那么圆电模 TE<sub>0m</sub> 和圆磁模 TM<sub>0m</sub> 完全被排除, 只有线偏振模 EH<sub>1m</sub> 和 LP<sub>n, m</sub> 才能存在。因为波导模的传播损耗( $\gamma_{nm}$  的虚部)随模脚标的增加而迅速增大, 所以介质波导管中以圆对称线偏振模 EH<sub>1m</sub> 较为重要, 特别是与自由空间高斯模 TEM<sub>00</sub> 相似的最低损耗的 EH<sub>11</sub> 模最为重要。

圆对称线偏振模 EH<sub>1m</sub>(LP<sub>0m</sub>) 和组合的非圆对称线偏振模 LP<sub>n, m</sub>( $n \geq 1$ ), 可以按角向对称记号  $n$  分类。每类在  $0 \leq r \leq a$  区间形成一套完全正交函数系列  $\psi_{nm}$ 。这些模式与由

Kogelnik 和 Li<sup>[10]</sup> 详细考察过的自由空间高斯-拉盖尔模 TEM<sub>np</sub> 很相似。它们之间的耦合只有当角向对称相同, 即  $n$  相等的模式之间才能发生。在束腰位置的 TEM<sub>np</sub> 模由下式表示:

$$\varphi_{np}(r, \theta) = B_{np} (r/\omega_0 \cdot 2^{1/2})^n L_p^n \left( \frac{2r^2}{\omega_0^2} \right) \exp(-r^2/\omega_0^2) \cdot \cos n\theta \sin n\theta, \quad (5)$$

其中,  $L_p^n$  是缩合拉盖尔多项式,  $B_{np}$  是  $\varphi_{np}(r, \theta)$  在  $0 \leq r \leq \infty$  和  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  区间的归一化常数并可由下式表示:

$$B_{np} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega_0} & (\text{当 } n=0), \\ \frac{2}{\sqrt{n! \pi}} \cdot \frac{1}{\omega_0} & (\text{当 } n \neq 0, p=0). \end{cases} \quad (6)$$

将(5)式按(1), (2)和(3)式代表的  $\psi_{nm}$  函数系列展开(即  $\varphi_{np}$  的傅里叶展开)为

$$\varphi_{np} = \sum_{m=1}^{\infty} {}^p C_{nm} \psi_{nm}, \quad (7)$$

$${}^p C_{nm} = A_{nm} B_{np} \int_0^a \int_0^{2\pi} \varphi_{np} \cdot \psi_{nm} \cdot r dr d\theta, \quad (8)$$

式中展开系数  ${}^p C_{nm}$  就是 TEM<sub>np</sub> 与 LP<sub>nm</sub> 模之间的偶合系数。当  $p=0$  时, 根据(1)~(6)式和(8)式对  $\theta$  积分, 并将贝塞耳函数用级数表示, 并令  $r/a=t$ ,  $\omega_0/a=q$ , 则上式变为

$${}^0 C_{nm} = \frac{(2)^{n+3/2}}{\sqrt{n!} J_{n+1}(u_{n+1,m})} \cdot \frac{1}{q^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \cdot \left( \frac{u_{n+1,m}}{2} \right)^{2k+n} \times \int_0^1 t^{2k+2n+1} \cdot \exp(-t^2/q^2) \cdot dt, \quad (9)$$

将积分中的  $e$  指数函数也用级数表示, 积分后便得到

$${}^0 C_{nm} = \frac{(2)^{n+3/2}}{\sqrt{n!} J_{n+1}(u_{n+1,m})} \cdot \frac{1}{q^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \times \left( \frac{u_{n+1,m}}{2} \right)^{2k+n} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! q^{2l}} \cdot \frac{1}{2(n+k+l+1)}. \quad (10)$$

或将(9)式连续进行分部积分后得到

$${}^0 C_{nm} = \frac{(2)^{n+1/2}}{\sqrt{n!} J_{n+1}(u_{n+1,m})} \cdot q^{2k+n+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \times \left( \frac{u_{n+1,m}}{2} \right)^{2k+n} \cdot \left[ 1 - e^{-1/q^2} \sum_{l=0}^{k+n} \frac{1}{l! q^{2l}} \right]. \quad (11)$$

经同样的手续可得到  $p \neq 0, n=0$  的耦合系数  ${}^p C_{0m}$ 。由于它们的表示式较为复杂, 我们仅将  $p=1$  的耦合系数  ${}^1 C_{0m}$  列举如下,

$$\left. \begin{aligned} {}^1 C_{0m} &= {}^0 C_{0m} - \frac{4\sqrt{2}}{J_1(u_{1m})} \cdot \frac{1}{q^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!k!} \left( \frac{u_{1m}}{2} \right)^{2k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!q^{2l}} \cdot \frac{1}{2(k+l+2)}, \\ {}^1 C_{0m} &= {}^0 C_{0m} - \frac{2\sqrt{2}}{J_1(u_{1m})} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot (k+1) \cdot \left( \frac{u_{1m}}{2} \right)^{2k} \cdot q^{2k+1} \cdot \left[ 1 - e^{-1/q^2} \sum_{l=0}^{k+1} \frac{1}{l!q^{2l}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由于  $\exp(-t^2/q^2)$  的级数展开, 只当  $q > 0$  时成立, 对于  $q$  很小时展开是近似的, 所以耦合系数的第一个级数表示式[(10)式]在  $q$  较大时( $q > 0.5$ )收敛较好。当  $q$  较小时( $0.1 \leq q < 0.5$ ), 第二个级数表示式[(11)式]的收敛较快。当  $q$  趋于零时, 所有耦合系数都趋于零值。

### 三、数值结果与讨论

作者利用数值计算了几个重要的耦合系数  ${}^p C_{nm}$  (当  $n=0$  时  $p=0$  和  $p=1$  以及  $n=2$  和  $3$  时  $p=0$ ) 与归一化束腰  $\omega_0/a$  的关系, 如图 1~4 所示。各类耦合系数,  $m$  只取 1 到 4。因为从这些图中可知前四个波导模 ( $m=1\sim 4$ ) 在  $0.1 < q < 0.8$  几乎包括了全部被耦合的高斯-拉盖尔模的能量。这一事实证明展开式 [(7) 式] 是正确的, 不违背波导半径远大于波长的假设。从这些图中可看到各类耦合都有最大的耦合系数, 它们所代表的耦合模之间最相似。各类最大耦合系数的最大值和它对应的归一化束腰  $\omega_0/a$  列于表 1 中。从表 1 中可知它们在最大值时, 耦合了原来能量的  $({}^p C_{nm})^2 = 87\%$  以上。其中自由空间高斯模 TEM<sub>00</sub> 与 EH<sub>11</sub> (LP<sub>01</sub>) 模的耦合系数高达  $-0.9904$ , 即 TEM<sub>00</sub> 模的 98% 以上的能量被转换到介质波导模 EH<sub>11</sub>。与这个最大值对应的归一化束腰  $\omega_0/a = 0.6436 \pm 0.0001$ , 和 Abram<sup>[9]</sup> 的结果相

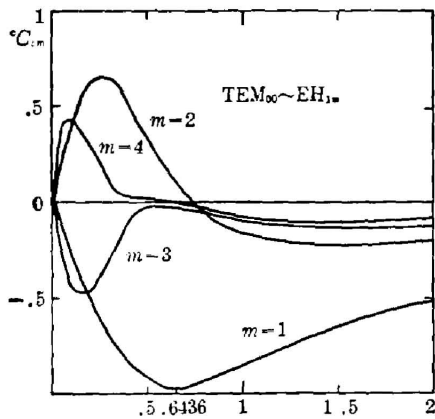
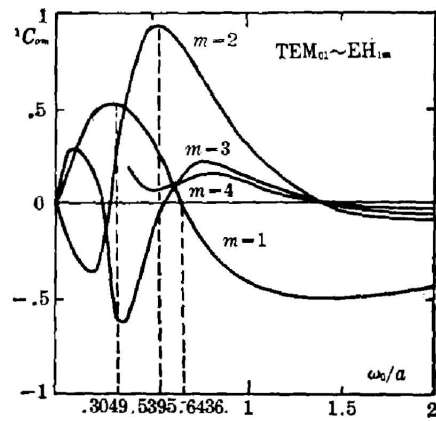
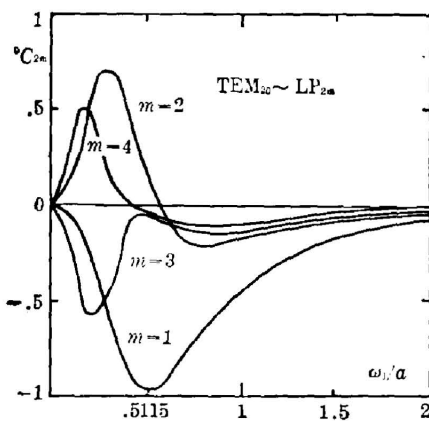
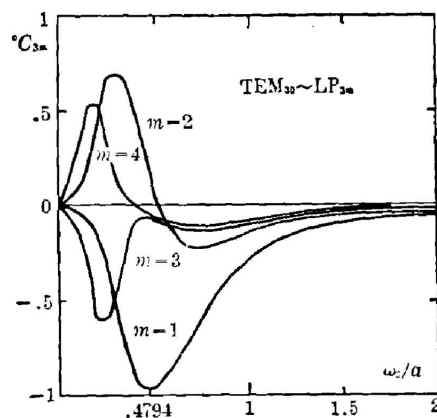
图 1 耦合系数  ${}^0C_{0m}$  对  $\omega_0/a$  的关系Fig. 1 Coupling coefficient  ${}^0C_{0m}$  versus  $\omega_0/a$ 图 2 耦合系数  ${}^1C_{0m}$  对  $\omega_0/a$  的关系Fig. 2 Coupling coefficient  ${}^1C_{0m}$  versus  $\omega_0/a$ 图 3 耦合系数  ${}^0C_{2m}$  对  $\omega_0/a$  的关系Fig. 3 Coupling coefficient  ${}^0C_{2m}$  versus  $\omega_0/a$ 图 4 耦合系数  ${}^0C_{3m}$  对  $\omega_0/a$  的关系Fig. 4 Coupling coefficient  ${}^0C_{3m}$  versus  $\omega_0/a$

表 1 几类  $TEM_{np}$  和  $LP_{nm}$  模之间的最大耦合系数, 它的最大值和对应的  $\omega_0/a$  值  
 Table 1 The maximal coupling coefficients between the  $TEM_{np}$  and  $LP_{nm}$  modes, it's maximum value and corresponding versus  $\omega_0/a$

最大耦合系数	${}^0C_{01}$	${}^1C_{02}$	${}^0C_{21}$	${}^0C_{31}$
$\omega_0/a(\pm 0.0001)$	0.6436	0.5395	0.5115	0.4724
耦合系数的最大值	-0.99043	0.93586	-0.97772	-0.97312

同。从图 1 还可看到, 归一化束腰  $\omega_0/a$  在 0.55~0.75 之间, 耦合能量的百分数( ${}^0C_{01}$ )<sup>2</sup> 也大于 95%。以上结果与 Hall<sup>[11]</sup> 用  $CO_2$  激光得到的最佳耦合的实验结果  $\omega_0/a=0.6435$  和 Smith<sup>[9]</sup> 用 He-Ne 激光得到的实验值  $\omega_0/a=0.728$  很好地一致。由于各类耦合模都有最佳归一化束腰, 所以当束腰一定的高斯-拉盖尔模由自由空间进入介质波导时, 可以选择波导的半径来达到最佳耦合; 反之, 也可以利用透镜改变它的束腰来配合一定半径的介质波导, 以实现模式能量之间的最佳转换。从图 1 和图 2 比较耦合系数  ${}^0C_{01}$  和  ${}^1C_{01}$  可知, 当  $\omega_0/a < 0.2$  时  $|{}^0C_{01}| \sim |{}^1C_{01}|$ 。它说明若光泵远红外激光器的输入孔半径小于 1/5 波导半径, 则  $CO_2$  激光泵束用高斯模或圆环模对输出功率影响不大。这一结果为 Lourtioz 等<sup>[12]</sup> 的实验所证实。由于迄今光泵远红外激光器采用的输入孔半径远小于最佳耦合孔半径, 这是它的效率远小于理论值的一个原因。因此, 寻找增大归一输入孔半径的耦合方式是提高它的效率的途径之一。

薛文琼同志参加了部分计算工作, 在此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] E. A. J. Marcatili, R. A. Schmelzter; *Bell. Syst. Tech. J.*, 1964, **43**, No. 4 (Jul), 1783.
- [2] P. W. Smith; *Appl. Phys. Lett.*, 1971, **19**, No. 5 (Sep), 132.
- [3] T. J. Bridges, E. G. Burkhardt *et al.*; *Appl. Phys. Lett.*, 1972, **20**, No. 10 (15 May), 403.
- [4] H. Steffen, F. K. Kneubuhl; *Phys. Lett.*, 1968, **27A**, No. 9 (23 Sep), 612.
- [5] P. Belland, D. Veron *et al.*; *J. Phys. (D): Appl. Phys.*, 1975, **8**, No. 18 (21 Dec), 2113.
- [6] D. T. Hodges, F. B. Foote *et al.*; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1977, **QE-13**, No. 6 (Jun), 491.
- [7] J. P. Crenn; *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, 1979, **MTT-27**, No. 6 (Apr), 573.
- [8] J. J. Degnan; *Appl. Opt.*, 1973, **12**, No. 5 (May), 1026.
- [9] R. L. Abrams; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1972, **QE-8**, No. 11 (Nov), 838.
- [10] H. Kogelnik, T. Li; *Appl. Opt.*, 1966, **5**, No. 10 (Oct), 1550.
- [11] D. R. Hall, E. L. Gorton *et al.*; *J. Appl. Phys.*, 1977, **48**, No. 3 (Mar), 1212.
- [12] J. M. Lourtioz, R. Adde *et al.*; *Revue de Phys. Appl.*, 1979, **14**, No. 2 (Feb), 323.

## Coupling coefficients between TEM<sub>*np*</sub> modes and hollow dielectric waveguide modes

ZHONG QUANDE

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

(Received 6 December 1982)

### Abstract

In this paper, the field distributions of the linearly polarized modes EH<sub>1*m*</sub> and LP<sub>*nm*</sub> ( $n \geq 1$ ) are discussed in the large radius hollow dielectric waveguides. The latter is certainly linear combinations of the degenerate waveguide modes. Then the coupling coefficients are between the free-space Gaussian-Laguerre modes and these linearly polarized waveguide modes. The results agree well with published experimental data. We also discussed the influences of input coupling hole with less diameter on output power of the optically pumped FIR laser.