

定量刀口检验研究

高必烈 潘君骅 李德培
(中国科学院南京天文仪器厂)

一、问题的提出

刀口检验用于高精度的光学零件抛光工艺已有一百多年历史,它一直起着很重要的作用,直到现在还是被广泛地使用着。这个检验方法的优点在于它的极高的灵敏度和直观性,而其缺点是不能定量。根据阴影图判断波面误差的准确性与误差大小有关,误差愈大愈不准确,一般情况只能达50~80%左右。少数有经验的光学专家在波面误差为 0.1λ 量级时判断的准确性有可能达90%。这当然还是不能令人满意的。因此,研究出一种客观的定量刀口检验方法是光学界共同关心的事。苏联的马克苏托夫在四十年代曾做过定量刀口检验的研究^[1],但所得结果连他自己也不满意。

Linfoot在1955年解决了刀口检验的理论问题^[2],他用衍射理论求出了波面误差和阴影图亮度分布的数学关系。但是Linfoot的工作只是做到严格地解释阴影图,并阐明了用几何光学方法所不能解释的边界现象。

作者曾试图通过硬件来解决Linfoot积分式的反演计算,从而解决刀口检验的定量问题。但是实验、分析与计算表明,用简单的积分线路甚至无法正确地把阴影图还原成最简单的波面误差方程。即使我们可以做到对某种特定的波面误差用特殊的线路来实现阴影图还原,但这种做法没有实用价值,因为实际的波面误差可以是各式各样的,无法使用固定的线路。

七十年代左右国外由于发展空间望远镜的需要,对刀口检验理论又重视起来,发表了不少文章^[3~9]。

分析了现有的情况,我们选择先从数学上解决Linfoot积分的反演计算,然后根据实测亮度分布用计算机算出波面误差的办法作为解决定量刀口检验的途径。

二、阴影图的数学表达及波面误差的反演计算

Linfoot从衍射理论导出阴影图的数学表达式的过程比较繁琐,用傅里叶变换方法可以非常简洁地导出这一结果。

设想用刀口在反射镜的曲率中心处检验该镜子,可以把镜面误差看作是放在完好的镜子之前的一个物体。这样,镜子的聚焦面就是该物体的频谱面,而刀口作用在该频谱面上如一空间滤波器。

假定刀口是从右切向左,则它的谱函数可写成

收稿日期:1982年8月24日;收到修改稿日期:1983年1月24日

$$H(f_x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{sign}(f_x) = \begin{cases} 1 & f_x < 0 \\ 0 & f_x \geq 0, \end{cases}$$

其中符号函数

$$\text{sign}(f_x) = \begin{cases} -1 & f_x < 0 \\ 1 & f_x \geq 0. \end{cases}$$

令在刀口之前的输入波面为 $u_i(x)$, 其傅里叶变换为 $U_i(f_x)$; 刀口之后的输出波面为 $u_o(x)$, 其傅里叶变换为 $U_o(f_x)$, 则可写出

$$U_o(f_x) = U_i(f_x) H(f_x),$$

因此

$$u_o(x) = F^{-1}\{U_o(f_x)\} = \frac{1}{2} u_i(x) - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_i(t)}{t-x} dt. \quad (1)$$

假定输入波面的误差为 $f(x)$, 则 u_i 可表示为

$$u_i(x) = e^{-i2\pi f(x)},$$

展开成 Taylor 级数, 并于 $f(x) \ll 1$ 时, 可略去高次项:

$$u_i(x) \approx 1 - 2\pi i f(x).$$

代入(1)式, 并注意对于有限口径, 积分域从 -1 到 $+1$, 可得:

$$u_o(x) = \left[\frac{1}{2} - \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt \right] - i \left[\pi f(x) + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right].$$

于是阴影图上的光强分布为:

$$I(x) = u_o(x) \cdot \bar{u}_o(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\pi^2} \ln^2 \left| \frac{1-x}{1+x} \right| - \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt + f(x) \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|.$$

对于理想波面 $f(x) = 0$, 其光强分布为

$$I_0(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\pi^2} \ln^2 \left| \frac{1-x}{1+x} \right|.$$

由此得到有误差波面与理想波面的阴影图光强差的分布:

$$F(x) = \Delta I(x) = I(x) - I_0(x) = f(x) \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| - \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt = \int_{-1}^1 \frac{f(x) - f(t)}{t-x} dt. \quad (2)$$

(2)式是本工作的出发点, 在实验中可测到的是 $\Delta I(x)$, 而要求的是 $f(x)$, 因此须反演(2)式。本文将用两种方法来解决这个问题, 以比较及核对计算的精度及可靠性。

1. 从数学手册可以查到, 具有柯西核 $\left(\frac{dt}{t-x}\right)$ 的奇异积分方程的反演公式为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\Delta I(x) \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|}{\pi^2 + \ln^2 \left| \frac{1-x}{1+x} \right|} + \int_{-1}^1 \frac{\Delta I(t)}{\left[\pi^2 + \ln^2 \left| \frac{1-t}{1+t} \right| \right] (t-x)} dt + C \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\Delta I(x)}{\pi^2 + \ln^2 \left| \frac{1-x}{1+x} \right|} + \frac{\Delta I(t)}{\pi^2 + \ln^2 \left| \frac{1-t}{1+t} \right|} \frac{dt}{t-x} dt + C, \end{aligned}$$

为便于数值计算可改写为:

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m+1} H_j \left[\frac{\Delta I(x_i)}{\pi^2 + \ln^2 \left| \frac{1-x_i}{1+x_i} \right|} + \frac{\Delta I(x_j)}{\pi^2 + \ln^2 \left| \frac{1-x_j}{1+x_j} \right|} \right] \frac{1}{j-i} + C, \quad (3)$$

其中 H_j 为牛顿柯斯数。对于 $m+1$ 个节点的 x_i 来说有:

$${}_{m+1}[f(x_i)]_1 = {}_{m+1}[G_0]_{m+1} \cdot {}_{m+1}[F(x_i)]_1 + {}_{m+1}[C]_1,$$

其中 G_0 是由(3)式所得出的各 x_i 点的 F 的系数阵。再令 $[C] = -[G_0]_{m+1}^{-1} [F(x_i)]_1$, 则有

$$[f(x_i)]_1 = [G][F(x_i)]_1. \quad (4)$$

$[C]$ 取这个值是表示以镜面中心点的亮度为参考, 在这一点 $\Delta I(x)$ 为零。

2. 傅里叶余弦级数法。将(2)式作变量代换, 令 $x = \cos \phi$, $t = \cos \theta$, 则

$$F(\phi) = \int_0^\pi \frac{f(\theta) - f(\phi)}{\cos \theta - \cos \phi} d \cos \theta. \quad (5)$$

从(5)式可以求出对应于 $f(\phi)$ 为 $\cos 0^\circ$, $\cos \phi$, $\cos 2\phi$, $\cos 3\phi \dots$ 等的 $F(\phi)$ 值。从而再求出对应于 $F(\phi)$ 为 $\cos 0^\circ$, $\cos \phi$, $\cos 2\phi$, $\cos 3\phi, \dots$ 等的 $f(x)$ 值。

将 $F(\phi)$ 展开成傅里叶余弦级数:

$$F(\phi_i) = a_1 + a_2 \cos \phi_i + a_3 \cos 2\phi_i + \dots + a_n \cos (n-1) \phi_i + \dots,$$

写成矩阵形式:

$${}_m[F(\phi_i)]_1 = {}_m[A]_{m \cdot m} [a]_1. \quad (6)$$

再将 $f(\phi_i)$ 展开成傅里叶余弦级数, 并用上面求得的对应用于各 $F(\phi_i)$ 的 $f(\phi)$ 值代入得:

$$f(\phi_i) = -\frac{1}{4} \left\{ 2a_1 \cos \phi_i + a_2 \cos 2\phi_i + a_3 \left(\cos 3\phi_i - \frac{1}{3} \cos \phi_i \right) + \dots \right. \\ \left. + a_j \sum_{i=1}^{n+1} h_i \cos (j+2-2l) \phi_i + \dots \right\}.$$

写成矩阵形式:

$${}_m[f(\phi_i)]_1 = {}_m[M]_{m \cdot m} [a]_1. \quad (7)$$

从(6)式, 用最小二乘法可求得系数阵 $[a]$, 即

$${}_m[a]_1 = -{}_m[A^T A]_{m \cdot m}^{-1} [A^T]_{m \cdot m} [F]_1 = {}_m[B]_{m \cdot m} [F]_1,$$

于是得

$${}_m[f(\phi_i)]_1 = {}_m[M]_{m \cdot m} [B]_{m \cdot m} [F]_1 = {}_m[G]_{m \cdot m} [F]_1. \quad (8)$$

若我们有规则地选取 ϕ_i 值, 则可使(8)式的运算大大简化, 例如对称地选取 ϕ , 则可将 $(A^T A)^{-1}$ 化为一个对角阵, 在 $m=2n$ 时,

$$\phi_i = \frac{(2i-1) \cdot 180^\circ}{4n}.$$

为了验证上述两种方法的计算精度, 先取一个已知误差函数 $f(x)$, 求出亮度差函数 $F(x)$, 再用上述两种方法反算 $f(x)$ 。

所取的误差函数为

$$f(x) = - \begin{cases} \frac{1}{4} (1-z^2)^2 & (z^2 < 1), \\ 0 & (z^2 \geq 1), \end{cases}$$

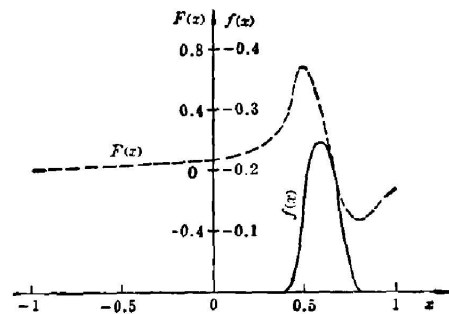


图 1

式中 $z=5x-3$ 。这是一个局部高,如图 1 实线所示。其亮度差函数 $F(x)$ 则如虚线所示。用两种方法反算出的 $f(x)$ 函数在最大波前差为 $\lambda/4$ 时,第一种方法的偏差较大,为 0.74λ ,相对误差为 2.96% 。第二种方法的偏差更小,约 1.24% 。因此以后主要应采用第二种方法。

三、实验结果

为验证定量检验方法的可行性,对一个车间用的标准球面镜做了试验。图 2 为实验装置的示意图。其中 M 是口径为 210 mm , $R=1920\text{ mm}$ 的球面镜。在其球心处用自准型刀口仪 K 产生阴影图。在刀口之后一定距离处用前端排成约 2 mm 高, 0.05 mm 宽的光导纤维 LF 作为狭缝以扫描阴影图的直径。光导纤维的另一端接光电倍增管 PM 。用电机带动阿基米德螺线凸轮 A , 再推动光导纤维的一端实现重复匀速直线运动扫描。扫描范围约 40 mm 。扫描速度约 1 次/秒 。由光电倍增管测得的阴影图亮度值显示在低频示波器上。用一触发装置将机械扫描与示波器同步。为求得规一化的亮度值,必须知道 I_0 。不难看出,当镜面不存在中心彗差时,只要镜面误差不十分大,中心区的亮度就是 I_0 。实测时先拍摄下示波器显示的亮度曲线,然后从照片上测出各点的亮度差值并作规一化,再用计算机算出镜面误差。

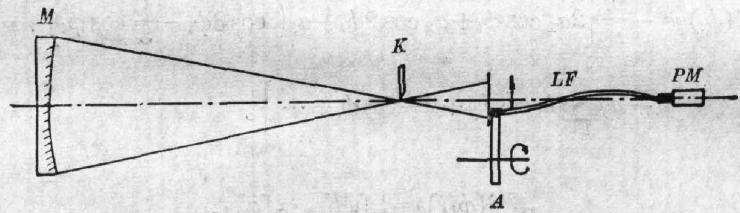


图 2

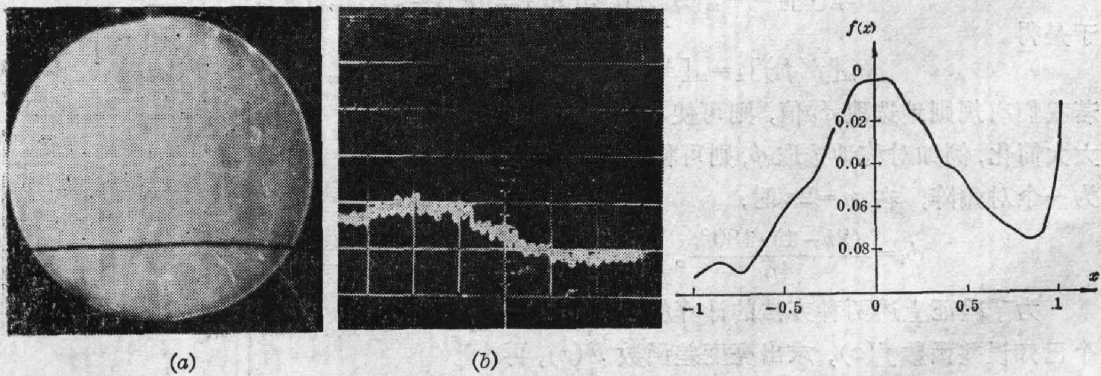


图 3

图 4

图 3(a) 为这个镜子的阴影图照片,图 3(b) 为阴影图沿水平方向直径的亮度曲线照片。图 4 为计算出的镜面误差曲线。从计算数据知镜面的最大误差为 0.046λ 。这个数值和该镜子加工完了时所估计的 $\lambda/20$ 基本符合。

四、尚待解决的问题

完成的工作是解决所提出问题的第一步,为了使定量刀口检验仪器化、实用化,必须继续解决另外一些技术性问题,其中主要的有:

(1) 中心遮拦的情况。在实际工作中经常遇到镜面中心挖孔或被遮掉。这时在测 $F(x)$ 时要越过遮拦区,而计算公式也要作相应的变化,即有关的积分式都不能从 -1 连续到 $+1$,而是分成 -1 到 $-x$; $+x$ 到 $+1$ 两段 ($0 < |x| < 1$)。

(2) 刀口切轴精度。在数学关系的推导中是假定刀口刃边正好与光轴相交。实验时可以先用眼睛观察阴影图,使误差引起的亮度差最明显,取得正确的切轴程度。应该寻找出一个客观的标准来判断正确的切轴程度。

(3) 亮度值测试方法。实用的仪器不能采用照相后测量的方法,必须用实时输出,自动记录的方式。

参 考 文 献

- [1] Проблемы Новейшей Физики Выпуск XXIII.
- [2] E. H. Linfoot; *Recent Advances in Optics*, (Oxford University Press, 1955), Chap. II.
- [3] R. G. Wilson; *Appl. Opt.*, 1975, 14, No. 9 (Sep), 2286.
- [4] S. Katzoff; *NASA Tech. Note*, D-6119 (1972).
- [5] B. E. Getwood; *NASA Contract Rep.*, 1971, 1906.
- [6] J. Ojeda-Castáneda; *Optical Shop Testing*, (New York Printed, 1978), Chap. 8.
- [7] R. Barakat; *J. O. S. A.*, 1969, 59, No. 11 (Nov), 1432.
- [8] W. T. Welford; *Opt. Commun.*, 1970, 1, No. 1 (Jan), 9.
- [9] Lord Rayleigh; *Philos. Mag.*, 1971, 33, 161. *Reported in Scientific Papers*, Vol. 6, Dover, (New York), 455.

Quantitative analysis and experiment of Foucault knife-edge test

GAO BILEI PAN JUNHUA AND LI DEPAI

(Nanjing Astronomical Instruments Factory, Academia Sinica)

(Received 24 August 1982, revised 24 January 1983)

Abstract

In this paper the problem of quantitative analysis of the knife-edge test is studied. Taking the Linfoot's integral function as theoretical base, two methods for finding out the error function are derived. As an example, a precision spherical mirror is experimentally tested and the error curve is calculated. The amount of imperfection of the mirror is found to be 0.046λ , that is very close to the estimated value by the optician who makes it.