

# 全息透镜的成像特性

蔡履中 吕良晓  
(山东大学光学系)

## 提 要

本文根据透射式全息图可以反射再生的观点,同时考虑和分析了全息透镜的透射波成像和反射波成像,对 $\pm 1$ 级像建立了透镜-反射镜组合的理想模型。用傅里叶光学的方法,导出了一般孔径下全息透镜的点扩散函数和传递函数的表达式,由此可求得其极限分辨率及截止频率,并与普通透镜作了比较。对横向色模糊的不均匀性也进行了讨论。

## 一、引 言

全息透镜是一种全息光学元件(HOE)。由于它是薄膜型器件,有重量轻、性能可靠、制造方便、成本低等特点,可以完成聚焦、准直、分束、成像和光谱滤波等多种功能,在光学信息处理、全息存储、激光扫描、三维显示和像差校正等方面都有着重要的应用前景。这方面的研究已引起人们的广泛注意。文献[1]~[3]综述了全息光学元件的分析方法,全息透镜的透射成像性质与三级像差。文献[4]、[5]对全息图透射成像提出过等效透镜模型。本文试图比较系统地分析在各种情况下全息透镜所成 $\pm 1$ 级像的性质,并利用透射全息图可以反射再生的观点,提出完整的透镜-反射镜组合的理想成像模型。同时,从傅里叶光学理论出发,导出了全息透镜成像的点扩散函数及传递函数的一般表达式,由此可以求得任意孔径下全息透镜成像的(单色)分辨率极限和截止频率,并对复色光照明时的色模糊问题进行了讨论。这些论证对于全息透镜的理论分析和实际应用是有益的。

## 二、全息透镜的理想成像模型

全息透镜实质上是一种点源全息图,其记录与成像的示意图如图1所示。取以全息片 $H$ 中心为原点指向右方的轴为 $z$ 轴,1、2为记录点源,取 $z_1 < 0$ ,  $z_2 > 0$ 。0为成像时物点,不失其普遍性,以下恒令物点在 $H$ 左方,即 $z_0 < 0$ 。I为再现像点。

记1、2、0各点发出的球面波在 $H$ 面上的光场分布分别为 $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u_0$ ,在记录介质的线性范围, $\pm 1$ 级成像光波分别为 $u_0 u_1^* u_2$ 项和 $u_0 u_1 u_2^*$ 项<sup>[6]</sup>。根据文献[6]中的分析,由于全息片上银粒子的后向散射,这两项光波不仅可以透射成像,而且可以反射成像。因此,在不考虑全息片的有限孔径所产生的衍射效应时,在傍轴近似下,对同一物点 $O$ 可以得到四个理想像点 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ ,其中 $I_1$ 、 $I_2$ 为透射波形成的 $\pm 1$ 级像, $I_3$ 、 $I_4$ 为反射波形成的 $\pm 1$ 级像。它们的坐标分别为<sup>[6]</sup>

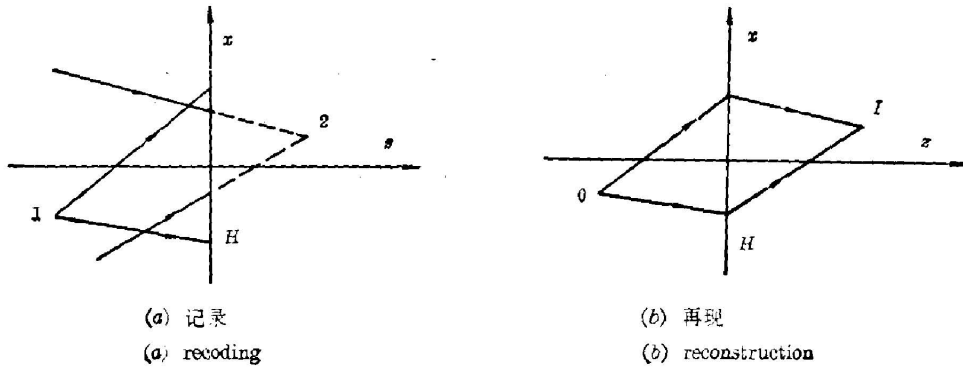


图 1

$$\begin{cases} z_1^I = \frac{\lambda_1 z_0 z_1 z_2}{\lambda_1 z_1 z_2 - \lambda_2 z_0 z_2 + \lambda_2 z_0 z_1}, \\ x_1^I = \frac{\lambda_1 x_0 z_1 z_2 - \lambda_2 x_1 z_0 z_2 + \lambda_2 x_2 z_0 z_1}{\lambda_1 z_1 z_2 - \lambda_2 z_0 z_2 + \lambda_2 z_0 z_1}, \\ y_1^I = \frac{\lambda_1 y_0 z_1 z_2 - \lambda_2 y_1 z_0 z_2 + \lambda_2 y_2 z_0 z_1}{\lambda_1 z_1 z_2 - \lambda_2 z_0 z_2 + \lambda_2 z_0 z_1}; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} z_1^{II} = \frac{\lambda_1 z_0 z_1 z_2}{\lambda_1 z_1 z_2 + \lambda_2 z_0 z_2 - \lambda_2 z_0 z_1}, \\ x_1^{II} = \frac{\lambda_1 x_0 z_1 z_2 + \lambda_2 x_1 z_0 z_2 - \lambda_2 x_2 z_0 z_1}{\lambda_1 z_1 z_2 + \lambda_2 z_0 z_2 - \lambda_2 z_0 z_1}, \\ y_1^{II} = \frac{\lambda_1 y_0 z_1 z_2 + \lambda_2 y_1 z_0 z_2 - \lambda_2 y_2 z_0 z_1}{\lambda_1 z_1 z_2 + \lambda_2 z_0 z_2 - \lambda_2 z_0 z_1}; \end{cases} \quad (2)$$

$$z_1^{III} = -z_1^I, \quad x_1^{III} = x_1^I, \quad y_1^{III} = y_1^I; \quad (3)$$

$$z_1^{IV} = -z_1^{II}, \quad x_1^{IV} = x_1^{II}, \quad y_1^{IV} = y_1^{II}; \quad (4)$$

式中  $\lambda_1, \lambda_2$  分别为记录和再现时波长,  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_0, y_0, z_0)$  分别为 1、2、0 点的坐标。由 (3)、(4) 式可见, 像点  $I_3, I_4$  分别与  $I_1, I_2$  关于  $H$  成镜像对称, 如图 2 所示 (图中以轴上物点为例)。

令 
$$f = \left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left( \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right) \right]^{-1}, \quad (5)$$

由前设 ( $z_1 < 0, z_2 > 0$ ), 知  $f > 0$ 。(1) 式第一式可写成

$$\frac{1}{z_1^I} - \frac{1}{z_0} = \frac{1}{f}. \quad (6)$$

可见对像点  $I_1$ , 全息图相当于一焦距为  $f$  的正透镜。在  $-\infty < z_0 < 0$  的范围内, 若  $|z_0| > f$ , 则  $z_1^I > 0$ , 成实像; 若  $|z_0| < f$ , 则  $z_1^I < 0$ , 成虚像。

同样的分析可得到

$$\frac{1}{z_1^{II}} - \frac{1}{z_0} = -\frac{1}{f}, \quad (7)$$

$$-\frac{1}{z_1^{III}} - \frac{1}{z_0} = \frac{1}{f}, \quad (8)$$

$$-\frac{1}{z_1^{IV}} - \frac{1}{z_0} = -\frac{1}{f}. \quad (9)$$

可见对像点  $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ ，全息图分别相当于焦距为  $-f$  的负透镜，焦距为  $f$  的凹面反射镜和焦距为  $-f$  的凸面反射镜。 $I_2$ 、 $I_4$  恒为虚像， $I_3$  则视物点位置可实可虚。

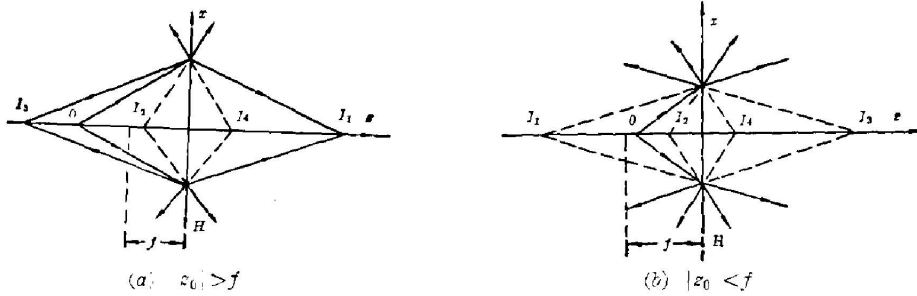


图 2

以上所有情况可归纳入表 1 其中示意图 3~6 也均以轴上物点为例。

表 1

成像光波	成像方式	理想像点	物距* ( $z_0 < 0$ )	成像性质		成像模型	示意图
				位置	虚实		
$u_0 u_1^* u_2^*$ (+1 级)	透射波成像	$I_1$	$ z_0  > f$	H 右方	实	焦距为 $f$ 的正透镜	图 3 (a)
			$ z_0  < f$	H 左方	虚		图 3 (b)
	反射波成像	$I_3$	$ z_0  > f$	H 左方	实	焦距为 $f$ 的凹面镜	图 4 (a)
			$z_0 < f$	H 右方	虚		图 4 (b)
$u_0 u_1 u_2^*$ (-1 级)	透射波成像	$I_2$	H 左方任意位置	H 左方	虚	焦距为 $-f$ 的负透镜	图 5
	反射波成像	$I_4$	H 左方任意位置	H 右方	虚	焦距为 $-f$ 的凸面镜	图 6

\* 设物点  $0$  在  $H$  左方, 即  $z_0 < 0$ 。

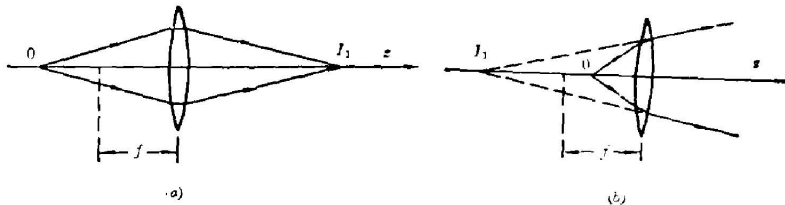


图 3

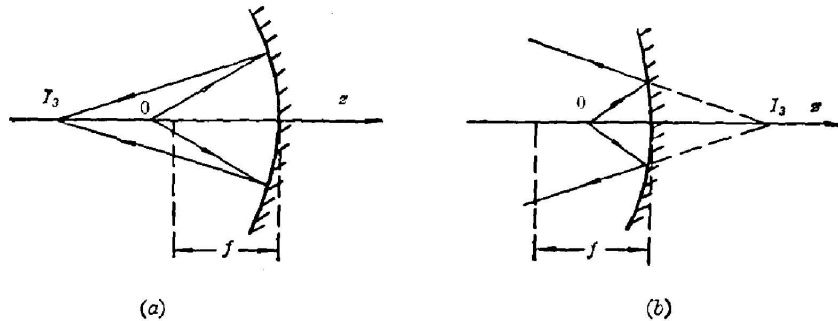


图 4

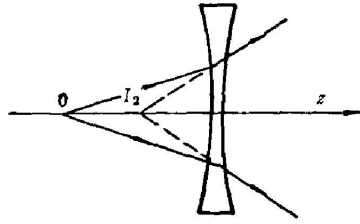


图 5

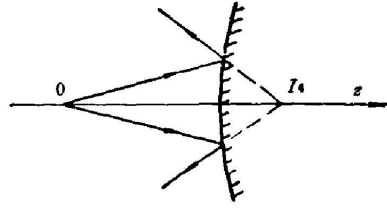


图 6

一般说来,轴上物点不一定能转换成轴上像点,由(1)~(4)式可见实现轴上点之间转换的条件是

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{x_2}{z_2}, \quad \frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2}, \quad (10)$$

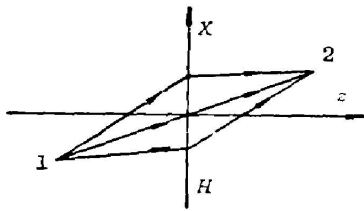


图 7

即记录时二点源与全息片中心共线,如图7所示,而同轴全息透镜可作为二者均在轴上的特例。

当  $z_2 = \infty$  时,全息透镜转化为全息波带板,这时焦距  $\pm f = \mp \frac{\lambda_1}{\lambda_2} z_1$ 。波带板对  $\pm 1$  级的透射像和  $\pm 1$  级的反射像也可分别看作焦距为  $\pm \frac{\lambda_1}{\lambda_2} |z_1|$  的正、负透镜和凹凸面镜。

以上透镜模型与已有文献相符,而反射镜模型也已得到了实验证实。

### 三、全息透镜的点扩散函数和分辨率

以上讨论中未考虑全息片的孔径效应。但由于实用中全息片总有有限孔径,故成像时所得像点并非几何点,而是由孔径衍射所形成的花样,其振幅分布即全息透镜的点扩散函数。下面对于给定的某一成像波长  $\lambda_2$  来讨论此函数。

在文献[7]中已系统地分析过彩虹全息图的点扩散函数,并指出菲涅耳全息图可作为其特例,据此可导出后者的点扩散函数为

$$h(\tilde{x}_i - x_i, \tilde{y}_i - y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Sigma(x, y) \exp \left\{ \left( -i2\pi \frac{1}{\lambda_2 l_r} [(\tilde{x}_i - x_i)x + (\tilde{y}_i - y_i)y] \right) \right\} dx dy$$

$$= \mathcal{F} \{ \Sigma(x, y) \} \Big|_{f_x = \frac{\tilde{x}_i - x_i}{\lambda_2 l_r}, f_y = \frac{\tilde{y}_i - y_i}{\lambda_2 l_r},} \quad (11)$$

其中  $\Sigma(x, y)$  为全息片孔径函数,  $(x_i, y_i)$  和  $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$  分别为理想像点坐标和像平面流动坐标,  $l_r$  为再现像点到全息片的轴向距离,  $f_x, f_y$  分别为  $x, y$  方向的空间频率,  $\mathcal{F}$  为傅里叶变换算符。

全息透镜实质上仍是一种(点源)全息图,物体  $O$  通过全息透镜的成像过程,也可看作是用组成物  $O$  的多个点源作为再现光源通过全息图重构多个球面波前的过程,因此,对物点的成像过程也可应用(11)式,其中  $l_r = |z_i|$ , 即

$$h(\tilde{x}_i - x_i, \tilde{y}_i - y_i) = \mathcal{F} \{ \Sigma(x, y) \} \Big|_{f_x = \frac{\tilde{x}_i - x_i}{\lambda_2 z_i}, f_y = \frac{\tilde{y}_i - y_i}{\lambda_2 z_i}.} \quad (12)$$

由上式可求得任意孔径全息透镜的点扩散函数, 并由此得出在该孔径下的(单色)分辨率极限<sup>[7]</sup>。例如, 对边长为  $W, L$  的矩形孔径(图 8), 可得  $x, y$  方向的极限分辨率分别为

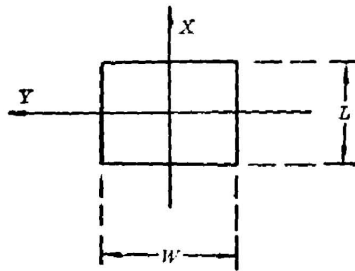


图 8

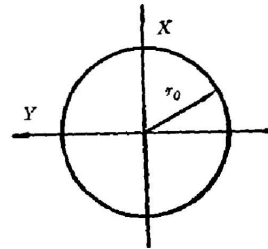


图 9

$$\Delta H_x = \frac{\lambda_2 |z_i|}{W}, \quad \Delta H_y = \frac{\lambda_2 |z_i|}{L}. \quad (13)$$

对半径  $r_0$  的圆孔径(图 9), 可得其极限分辨率(各向同性)为

$$\Delta H = 0.6 \frac{\lambda_2 |z_i|}{r_0}. \quad (14)$$

显然, 它就是再现时爱里(Airy)斑的半径。

#### 四、全息透镜的传递函数

文献[7]中求得了一般彩虹全息图的相干传递函数和非相干传递函数。作为特例, 对菲涅耳全息图可直接得出其相干传递函数为

$$H(f_x, f_y) = \Sigma(\lambda_2 |z_i| f_x, \lambda_2 |z_i| f_y), \quad (15)$$

非相干传递函数为

$$\mathcal{H}(f_x, f_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} \Sigma\left(\xi - \frac{\lambda_2 |z_i|}{2} f_x, \eta - \frac{\lambda_2 |z_i|}{2} f_y\right) \Sigma\left(\xi + \frac{\lambda_2 |z_i|}{2} f_x, \eta + \frac{\lambda_2 |z_i|}{2} f_y\right) d\xi d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty} \Sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta}, \quad (16)$$

其中  $\Sigma(x, y)$  是在反射坐标系中定义的。如上所述, 因为全息透镜可看作一种点源菲涅耳全息图, 故(15)、(16)式完全适用于全息透镜。由(15)、(16)式可求得各种孔径下全息透镜的相干截止频率和非相干截止频率。例如, 对图 8 的矩形孔径, 其  $x, y$  方向的相干截止频率分别为

$$f_{x, \max} = \frac{W}{2\lambda_2 |z_i|}, \quad f_{y, \max} = \frac{L}{2\lambda_2 |z_i|}. \quad (17)$$

对图 9 的圆孔径透镜, 其相干截止频率和非相干截止频率分别为

$$\rho_{m, \text{coh}} = \frac{r_0}{\lambda_2 |z_i|}, \quad \rho_{m, \text{inc}} = \frac{2r_0}{\lambda_2 |z_i|}, \quad (18)$$

即非相干截止频率扩展到相干截止频率的二倍。

## 五、全息透镜色模糊的不均匀性

由(5)式可见,全息透镜焦距的绝对值 $f$ 与 $\lambda_2$ 有关,故用复色光照明时不同 $\lambda_2$ 对应像点的轴向及横向坐标都发生偏移,形成色模糊。以+1级透射像为例,由(1)、(5)、(6)式可求得谱带展宽 $\Delta\lambda_2$ 所引起的色模糊量为

$$\Delta z_i^t = -\frac{z_i^2}{f\lambda_2} \Delta\lambda_2, \quad (19)$$

$$\Delta x_i^t = \frac{\lambda_1 z_0 z_1 z_2 (z_2 - z_1)}{(\lambda_1 z_1 z_2 - \lambda_2 z_0 z_2 + \lambda_2 z_0 z_1)^2} (x_0 - \bar{x}_0), \quad (20)$$

$$\Delta y_i^t = \frac{\lambda_1 z_0 z_1 z_2 (z_2 - z_1)}{(\lambda_1 z_1 z_2 - \lambda_2 z_0 z_2 + \lambda_2 z_0 z_1)^2} (y_0 - \bar{y}_0), \quad (21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{z_2 - z_1}, \\ \bar{y}_0 &= \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{z_2 - z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

可见在特定物点 $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ ,其对应像点的横向色模糊为零,以此点为中心,相等横向色模糊区构成一个个同心圆环,距环心越远,横向色模糊越大。对轴向色模糊,由(19)式可知,它随着象点与全息透镜距离的增大而增大。

对满足(10)式,即能实现轴上物点转换成轴上像点的全息透镜,可得 $\bar{x}_0 = \bar{y}_0 = 0$ ,即轴上点的横向色模糊为0,离轴越远,横向色模糊越大,这种情况也包括同轴全息透镜。

## 六、结 论

(1) 全息透镜既可透射成像,也可反射成像。同级光波的反射像与透射像关于全息片平面成镜面对称。全息透镜对透射 $\pm 1$ 级像分别等效于焦距为 $\pm f$ 的正透镜和负透镜,对反射 $\pm 1$ 级像分别等效于焦距为 $\pm f$ 的凹面镜和凸面镜,其物像关系与相应的普通透镜及球面镜相同。

(2) 全息透镜的单色点扩散函数是其孔径函数的傅里叶变换,相干传递函数由孔径函数直接决定,非相干传递函数由孔径函数的自相关决定,此性质与普通光学透镜相同<sup>[8]</sup>。在全息片为圆形孔径的情况下,其分辨率与截止频率的表达式也与普通透镜相同<sup>[8]</sup>。但与普通透镜的区别在于:全息片易于制成较大孔径,且可根据不同使用目的而灵活选取孔径形状(例如矩形),在不同方向分辨率与截止频率可以有所不同,在孔径越宽的方向相应的分辨率和截止频率也越高。

(3) 全息透镜的色模糊对物上各点是不均匀的,在物平面某一特定位置横向色模糊为0,而等横向色模糊区构成以此点为中心的同心环。故为减小色模糊,物应尽可能放在此环心附近,对同轴全息图则应放在轴上。当然,由于色模糊量一般较大,单片全息透镜一般是不适宜用宽谱带光源对较大物体成像的。

## 参 考 文 献

- [1] D. H. Close; *Opt. Eng.*, 1975, **14**, No. 5 (Sep-Oct), 408.  
[2] 徐昆贤;《物理》, 1981, **10**, No. 12 (Dec), 711.  
[3] 于美文, 谢敬辉, 王民草;《物理》, 1981, **10**, No. 7 (Jul), 408.  
[4] 王润文;《激光》, 1975, **2**, No. 3 (Jun), 42.  
[5] W. C. Sweatt; *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**, No. 6 (Jun), 803.  
[6] 蔡履中, 吕良晓;《激光》1982, **9**, No. 10 (Oct), 621.  
[7] 蔡履中, 张幼文;《物理学报》, 1982, **31**, No. 8 (Aug), 1020.  
[8] J. W. Goodman; *Introduction to Fourier Optics*, (McGraw-Hill, 1968), 第六章。

## The imaging properties of holographic lens

CAI LIZHONG AND LÜ LIANGXIAO

(Department of Optics, Shandong University, ~~Chengda~~ Jinan)

(Received 9 June 1982, revised 10 September 1982)

## Abstract

According to the point of view that the transmissive hologram can be reconstructed by reflection, the analyses of transmission imaging and reflection imaging are both presented. We postulated a model of lens-mirror composition for the  $\pm 1$  order images of a holographic lens. By using the method of Fourier optics, authors obtained the expressions for the point spread function and the transfer function of a holographic lens with arbitrary aperture. From this the limited resolution and the cut-off frequency may be derived. The inhomogeneity of the colour blur of image is also discussed.