第3卷 第5期 光学学报 Vol. 3, No. 5
1983年8月 ACTA OPTICA SINICA August, 1983

关于相干态随时间的演化

苏汝铿 史安昌 吴嘉达
(复旦大学物理系)

提 要

本文用密度矩阵方法研究了相干态在时间演化过程中仍保持为相干态的充要条件。证实 Glauber 条件是正确的，Kauo 的非议是没有根据的，Glauber 条件适用于相当一般形式的哈密顿量。

一、引 言

自从在量子光学中最早引入相干态[1]以来，相干态在激光、多体问题、基本粒子等许多领域中得到了广泛应用[2]。1966 年 Glauber[3] 最早给出相干态在时间演化过程中仍保持为相干态的充要条件为

$$i\dot{\hat{a}}(t)=[\hat{a}(t),\ \hat{H}(t)]=F(\hat{a}(t),\ t), \tag{1}$$

即湮灭算符的时间微商不依赖于产生算符。1976 年，Kano[4] 对此提出非议。他利用 Schröndinger 方程及相干态定义

$$|\alpha\rangle=e^{\alpha a^{+}-\alpha^{*}a}|0\rangle=e^{-|\alpha|^{2}/2}\sum_{n}\alpha^{n}|n\rangle/\sqrt{n!}, \tag{2}$$

得出要在整个时间演化过程中，使相干态永远保持为相干态的充要条件为

$$\begin{cases}-\dfrac{i}{2}\dfrac{d|\alpha(t)|^{2}}{dt}=h_{0}(\alpha(t),\ t), & (3)\\ i\dfrac{d\alpha(t)}{dt}=h_{1}(\alpha(t),\ t), & (4)\\ h_{l}(\alpha(t),\ t)=0\quad(l\geqslant 2), & (5)\end{cases}$$

其中 $h_l(\alpha(t),\ t)(l=0,\ 1,\ 2\cdots)$ 满足

$$\langle\alpha|H(a^{+},\ a,\ t)|\alpha(t)\rangle=H(\alpha^{*},\ \alpha(t),\ t)\langle\alpha|\alpha(t)\rangle, \tag{6}$$

$$H(\alpha^{*},\ \alpha(t),\ t)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^{*l}h_{l}(\alpha(t),\ t)。 \tag{7}$$

对比(1)和(3)、(4)、(5)式后不难看出，Glauber 条件与 Kano 条件是不一致的，Kano 条件比 Glauber 条件多了一个条件，即(3)式。

自 Kano 条件提出后，不少作者企图解决，Kano 和 Glauber 的争议。Letz[5] 在特定的哈密顿量

$$\hat{H}_{0}(t)=\omega(t)a^{+}a+f(t)a^{+}+f^{*}(t)a+\beta(t) \tag{8}$$

收稿日期：1982年7月28日

的条件下，引入时间演化算符，得出 Kano 条件是充分而非必要的结论。但是他的工作仅限于特殊的哈密顿量(8)，未能对 Kano 的非议作出一般性的评论。Chand[6] 则在 Glauber 条件是正确的前提下，指出 Kano 和 Glauber 的差别在于相干态 $|\alpha(t)\rangle$ 的定义中差一个相位因子。但大家都知道，对于非相对论量子力学，由于波函数的相位因子不影响 $|\psi|^2$ 的几率解释，因而具有不确定性。也就是说，Chand 的评述不能最终对 Glauber 条件和 Kano 条件作出判断。Puri 和 Lawande[7] 则引入含时间的厄米不变算符，但他们的讨论也仅局限于特殊哈密顿量(8)式。因而，迄今为止，尚未对 Kano 非议作出决定性判断。

本文将用最一般形式的哈密顿讨论这个问题。为避免不确定的相位因子，我们将用 Mista[8] 提出的密度矩阵方法。同时，本文将证明，Glauber 条件适用于相当一般形式的哈密顿量，因而 Kano 的非议是没有根据的。

二、保持相干态的充要条件

定义相干态密度矩阵[9]

$$\rho(t)=|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|, \tag{9}$$

则 $\rho(t)$ 满足的运动方程为($\hbar=1$)

$$i\,d\rho(t)/dt=[H(t),\ \rho(t)]。 \tag{10}$$

在相干态 $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ 表象中，(10)式可化为

$$i\,d\langle\alpha|\rho(t)|\beta\rangle/dt=\langle\alpha|[H(t),\ \rho(t)]|\beta\rangle。 \tag{11}$$

利用公式

$$\langle\alpha|\alpha(t)\rangle=\exp[-|\alpha|^2/2+\alpha^*\alpha(t)-|\alpha(t)|^2/2], \tag{12}$$

得

$$i\frac{d}{dt}\langle\alpha|\rho(t)|\beta\rangle=i\left[-\frac{d|\alpha(t)|^2}{dt}+\alpha^*\frac{d\alpha(t)}{dt}+\beta\frac{d\alpha^*(t)}{dt}\right]\langle\alpha|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|\beta\rangle。 \tag{13}$$

另一方面，任何哈密顿量总可按产生、湮灭算符展开成最一般的形式

$$\hat{H}(t)=\sum_{m,n}h_{m,n}(t)a^{+m}a^n。 \tag{14}$$

由于 H 为厄米，有

$$h_{m,n}(t)=h^*_{n,m}(t), \tag{15}$$

由此可算得

$$\langle\alpha|[H(t),\ \rho(t)]|\beta\rangle=\sum_{m,n}h_{m,n}(t)[\alpha^{*m}\alpha^n(t)-\alpha^{*m}(t)\beta^n]\langle\alpha|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|\beta\rangle。 \tag{16}$$

由(11)、(14)、(16)式得

$$i\left[-\frac{d|\alpha(t)|^2}{dt}+\alpha^*\frac{d\alpha(t)}{dt}+\beta\frac{d\alpha(t)}{dt}\right]=\sum_{m,n}h_{m,n}(t)[\alpha^{*m}\alpha^n(t)-\alpha^{*m}(t)\beta^n]。 \tag{17}$$

比较(17)式中两边 α^*, β 等同次幂的系数，得出在时间演化过程中相干态仍保持为相干态的充要条件为

$$\begin{cases} -i\dfrac{d|\alpha(t)|^2}{dt}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[h_{0n}(t)\alpha^n(t)-h_{n0}(t)\alpha^{*n}(t)], & (18)\\ i\dfrac{d\alpha(t)}{dt}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}h_{1n}(t)\alpha^n(t), & (19)\\ i\dfrac{d\alpha^*(t)}{dt}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}h_{n1}(t)\alpha^{*n}(t), & (20)\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}h_{mn}(t)\alpha^n(t)=0 \quad (m\geqslant 2), & (21)\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}h_{nm}(t)\alpha^{*n}(t)=0 \quad (m\geqslant 2)。 & (22)\end{cases}$$

显然，(19)、(20)、(21)、(22)式分别互为复共厄；它们分别和 Kano 条件(4)、(5)等效。方程(18)和 Kano 条件(3)等效。

现在我们来证明方程(18)不是独立的条件，它可由(19)、(21)式给出。以 $\alpha^*(t)$ 乘(19)式，$\alpha(t)$乘(20)式，相加后得

$$\begin{aligned} i\frac{d|\alpha(t)|^2}{dt}&=\sum_{n=0}^{\infty}[h_{1n}(t)\alpha^n(t)\alpha^*(t)-h_{n1}(t)\alpha^{*n}(t)\alpha(t)]\\ &=-[h_{01}(t)\alpha(t)-h_{10}(t)\alpha^*(t)]-\sum_{m=2}^{\infty}[h_{m1}(t)\alpha^{*m}(t)\alpha(t)-h_{1m}(t)\alpha^n(t)\alpha^*(t)]。\end{aligned} \tag{23}$$

另一方面，以 $\alpha^{*m}(t)$ 乘(21)式，$\alpha^m(t)$乘(22)式，相减后得

$$\begin{aligned} &h_{m1}(t)\alpha^{*m}(t)\alpha(t)-h_{1m}(t)\alpha^m(t)\alpha^*(t)\\ &\quad=[h_{0m}(t)\alpha^m(t)-h_{m0}(t)\alpha^{*m}(t)]\\ &\qquad+\sum_{n=2}^{\infty}[h_{nm}(t)\alpha^{*n}(t)\alpha^m(t)-h_{mn}(t)\alpha^{*m}(t)\alpha^n(t)] \quad (m\geqslant 2)。\end{aligned} \tag{24}$$

将(24)式代入(23)式，化简后得

$$-i\frac{d|\alpha(t)|^2}{dt}=\sum_{n=0}^{\infty}[h_{0n}(t)\alpha^n(t)-h_{n0}(t)\alpha^{*n}(t)],$$

这正是(18)式。于是我们就证明了(18)式不是独立的条件。因而在时间演化过程中，相干态仍保持为相干态的充要条件为(19)、(21)式，而易见这正是 Glauber 条件(1)。

于是也就证明了 Glauber 条件适用于相当一般形式的哈密顿量，Kano 条件(3)不是独立的条件，在一个合理的理论中，它可由 Glauber 条件导出。

三、讨　　论

1. 众所周知，一个物理体系能量零点的选择不影响体系的物理性质，但当将哈密顿量保持为 $H(t)\to H(t)+\beta(t)$ 时，波函数变为 $|t\rangle\to e^{-i\varphi(t)}|t\rangle$，$\varphi(t)=\int_0^t\beta(t')dt'$。这表明能量零点的选取表现在态矢量相位因子的选取上。相位因子对体系的物理性质无影响，但它的存在保证了态矢量满足 Schröndinger 方程。因此，若 $|t=0\rangle=|\alpha\rangle$为相干态，则时间演化后仍保持为相干态的态矢量$|t\rangle$的一般形式应为

$$|t\rangle=e^{i\varphi(t)}|\alpha(t)\rangle=e^{i\varphi(t)}e^{\alpha(t)a^+-\alpha^*(t)a}|0\rangle。 \tag{25}$$

在 Glauber, Mehta 等的证明中，采用 Heisenberg 图，$|t\rangle=u(t)|\alpha\rangle$，而时间演化算符 $u(t)$

满足 $i\dfrac{\partial u(t)}{\partial t}=Hu$ 方程。当 $H(t)\to H(t)+\beta(t)$ 时，$u(t)\to e^{-i\varphi(t)}u(t)$，$|t\rangle=u(t)|\alpha\rangle=e^{i\varphi(t)}|\alpha(t)\rangle$，这正是(25)式。由此可见在 Glauber 的证明中考虑了相位因子 $\varphi(t)$ 的影响，他是通过调节 $\varphi(t)$ 和 $\alpha(t)$ 而使 $|t\rangle$ 满足 Schröndinger 方程的。

2．反之，在 Kano 的证明中，使用的态矢量 $|t\rangle$ 为

$$|t\rangle=|\alpha(t)\rangle=e^{\alpha(t)a^{+}-\alpha^{*}(t)a}|0\rangle, \tag{26}$$

相当于取 $\varphi(t)\equiv 0$，因此也相当于仅仅通过调节 $\alpha(t)$ 而使 $|t\rangle$ 满足 Schröndinger 方程，因而对 $\alpha(t)$ 提出了更多的限制(条件(3))。

3．注意，由相干态的定义

$$\hat{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle \tag{27}$$

可知，相位因子的存在不影响相干态的性质。因而，只停留在 Glauber 和 Kano 的差别(相位因子)上，无法从根本上解决 Kano 非议。本文提出，用相干态密度矩阵解决这个问题，好处在于，无论在(25)式中选择何种 $\varphi(t)$，都不改变相干态密度矩阵 $\rho(t)$ 的形式。再考虑到本文采用哈密顿量 (14) 的普遍性，可以认为，本文在一定意义上已经解决了 Kano 和 Glauber 的争论。

参 考 文 献

[1] R. J. Glauber; *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **10**, No. 3 (Feb), 84.
E. C. G. Sudarshan; *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **10**, No. 7 (Apr), 277.

[2] J. R. Johnston; *Amer. J. Phys.*, 1970, **38**, No. 6 (June), 516.
倪光炯、苏汝铿、陈苏卿;《复旦学报》,(自然科学版), 1982, **21**, 第 1 期(3 月), 10.

[3] R. J. Glauber; *Phys. Lett.*, 1966, **21**, No. 6 (July), 650.
C. L. Mehta, E. C. G. Sudarshan; *Phys. Lett.*, 1966, **22**, No. 5 (Sep), 574.

[4] Y. Kano; *Phys. Lett.* (A), 1976, **56A**, No. 1 (Feb), 7.

[5] H. Letz; *Phys. Lett.* (A), 1977, **60A**, No. 5 (Mar), 399.

[6] P. Chand; *Nuvo Cimento*; 1979, **50B**, No. 1 (Mar), 17.

[7] R. R. Puri, S. V. Lawande; *Phys. Lett.*, 1979, **70A**, No. 2 (Feb), 69.

[8] L. Mista; *Phys. Lett*, (A), 1967, **25A**, No. 9 (Nov), 646.

[9] C. Cohen-Tannoudji *et al.*; *«Quantum Mechanics»*, (N. Y.), 1977.
W. H. Louisell; *«Quantum Statiatical Properties of Radiation»*, (John Wilry & Sons, 1973 Apr), p. 76.

On the time evolution of coherent states

Su Rukeng　Shi Anchang and Wu Jiada

(*Department of Physics, Fudan University, Shanghai*)

(Received 28 July 1982)

Abstract

By means of the density matrix method, the necessary and sufficient conditions for a coherent state to remain coherent at all times are discussed. It is shown that the conditions of Glauber are correct, the censure of Kano is groundless, and the conditions of Glauber are applicable for the Hamiltonian in quite general form.