第3卷 第5期
1983年8月

光学学报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 3, No. 5
August, 1983

傍轴光束截面的内能是一个不变量

邓锡铭 陈泽尊
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文从描写光束传输的流体模型中建立了内能概念[1]。证明，对于任何一个在真空中稳态传输的傍轴光束，光束截面的内能与截面的位置无关，即在传输过程中，内能是一个不变量。

在文献[1, 2]描述的稳态光束传输的流体模型中，建立了内能概念，其定义为

$$E_0=E\left[\int\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)^2\,d\tau+\int\frac{\phi_0^2}{c^2}(c\nabla L-V_c)^2\,d\tau\right], \tag{1}$$

右边第一项为内禀能量[1]，第二项为相对惯心内动能，ϕ_0 和 L 分别代表光束 $\phi=\phi_0e^{ikL}$ 的振幅和准程函，波矢 $k=2\pi/\lambda$，c 是光速，V_c 是积分域内场流体惯性中心的(能)速度[1]。E 是积分域内光束的能量。ϕ_0^2 满足归一化条件：$\int\phi_0^2\,d\tau=1$。(1)式取的积分域，须满足：

$$\int\nabla^2\phi_0^2\,d\tau=0。 \tag{2}$$

对于傍轴光束（指 $|\nabla L|\doteq1$，∇L 与光轴的夹角是小量），垂直于光束轴线的横截面的内能 E_0 可写成

$$E_0=\int\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)^2\,ds+\int\phi_0^2(\nabla L)_\perp^2\,ds。 \tag{3}$$

这里，$(\nabla L)_\perp$ 代表 ∇L 在横截面上的分量。为计算方便，已取截面光束能量 $E=1$，且

$$\int\phi_0^2\,ds=1。 \tag{4}$$

可以证明，对于任意傍轴光束，沿整个横截面取积分，均满足(2)式的条件。

本文将证明：在真空中传播的任一傍轴光束，在光轴任何位置上的光束横截面的内能都具有相同的数值，即傍轴光束截面的内能在稳态传输过程中是一个不变量。本文还例举几点实际应用。

一、一维厄米高斯光束横截面的内能

沿 z 阶轴传输的一个 m 阶一维厄米高斯光束可表示为：

$$\phi_m=\phi_{0m}e^{ikL_m}, \tag{5}$$

其中，$$L_m=z+\left(\frac{x^2}{2R}\right)+\left(\frac{1}{k}\right)\left[m+\left(\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{k\sigma_0^2}{2z}\right),\quad \phi_{0m}=a_mGH_m,$$

收稿日期：1983年1月29日

a_m 为归一化系数 $a_m^2=\frac{1}{m!2^m}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, G 为高斯因子 $G=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$, σ 为光束半径 $\sigma=\frac{1}{k\sigma_0}\times\sqrt{k^2\sigma_0^4+4z^2}$, σ_0 是光腰半径, R 为波面半径 $R=\frac{k^2\sigma_0^4+4z^2}{4z}$, 厄米多项式 $H_m=H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sigma}\right)$。

现选取 $z=z$ 的一个横截面来计算内能。这里考虑的是满足傍轴条件的厄米高斯光束。傍轴条件可表示为:

$$\frac{\sigma_0}{\sqrt{m+\frac{1}{2}}}\gg\lambda, \tag{6}$$

在这种条件下, $(\partial L_m/\partial z)$ 和 $(\partial\phi_{0m}/\partial z)$ 均属高级小量[3], 可略去。这样,

$$(\nabla L_m)_\perp=\frac{x}{R}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial H_m}{\partial x}=\frac{2\sqrt{2}\,m}{\sigma}H_{m-1}, \quad \frac{\partial G}{\partial x}=\left(-\frac{2x}{\sigma^2}\right)G。 \tag{8}$$

在满足傍轴条件下:

$$(\nabla\phi_{0m})^2=\left(\frac{\partial\phi_{0m}}{\partial x}\right)^2=a_m^2\left[\frac{\partial H_m}{\partial x}G+H_m\frac{\partial G}{\partial x}\right]^2, \tag{9}$$

(7)、(8)、(9)式代回(3)式,并引用厄米多项式的递推公式,得到

$$\int\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)^2ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_{0m})^2dx=(2m+1)\frac{1}{k^2\sigma^2}, \tag{10}$$

$$\int\phi_0^2(\nabla L)_\perp^2ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{0m}^2\left(\frac{\partial L_m}{\partial x}\right)^2dx=(2m+1)\frac{\sigma^2}{4R^2}, \tag{11}$$

注意到内禀能量和内部动能项内均含变数 z, 即与横截面位置的选择有关。但是, 由(5)式得:

$$\frac{1}{k^2\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{4R^2}=\frac{1}{k^2\sigma_0^2}。 \tag{12}$$

由此得,内能

$$E_0^{(m)}=(2m+1)\left(\frac{1}{k^2\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{4R^2}\right)=(2m+1)\frac{1}{k^2\sigma_0^2}。 \tag{13}$$

可见, 虽然当初选取了 $z=z$ 的横截面来计算内能, 但得到的结果只含参数 m, k, σ_0 不包含变数 z。说明任意选择光束横截面的位置, 得到的内能值都是一样的。所以, 内能是一个不变量。

二、两个厄米高斯光束叠加后的内能

用 Φ 代表 m 阶和 n 阶两个一维厄米高斯光束的线性叠加, 即:

$$\Phi=c_m\phi_m+c_n\phi_n, \tag{14}$$

这里, m, n 以及线性叠加系数 c_m, c_n 都是任意选取的。

$$\phi_m=\phi_{0m}e^{ikL_m}, \quad \phi_n=\phi_{0n}e^{ikL_n}。 \tag{15}$$

Φ 也可写成:

$$\Phi=\Phi_0e^{ikL}=\Phi_R+i\Phi_I, \tag{16}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\Phi_R&=c_m\phi_{0m}\cos kL_m+c_n\phi_{0n}\cos kL_n,\\ \Phi_I&=c_m\phi_{0n}\sin kL_m+c_n\phi_{0n}\sin kL_n,\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

$$\Phi_0^2=\Phi_R^2+\Phi_I^2,\quad L=\frac{1}{k}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\Phi_I}{\Phi_R}\right)。\tag{18}$$

满足傍轴条件下，由(16)，(18)式得：

$$\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)^2+\Phi_0^2(\nabla L)_1^2=\frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{\partial\Phi_R}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_I}{\partial x}\right)^2\right]。\tag{19}$$

将(17)式代回(19)式得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2}(\nabla\Phi_0)^2+\Phi_0^2(\nabla L)_1^2=&\left\{\frac{1}{k^2}\left[c_m^2\left(\frac{\partial\phi_{0m}}{\partial x}\right)^2+c_n^2\left(\frac{\partial\phi_{0n}}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{x^2}{R^2}(c_m^2\phi_{0m}^2+c_n^2\phi_{0n}^2)\right\}\\ &+A_1+A_2+A_3+A_4,\end{aligned}\tag{20}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\frac{2c_mc_n}{k^2}\left(\frac{\partial\phi_{0m}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\phi_{0n}}{\partial x}\right)\cos[k(L_m-L_n)],\\ A_2&=\frac{2c_mc_nx^2}{R^2}\phi_{0m}\phi_{0n}\cos[k(L_m-L_n)],\\ A_3&=-\frac{2c_mc_nx}{kR}\phi_{0m}\left(\frac{\partial\phi_{0n}}{\partial x}\right)\sin[k(L_m-L_n)],\\ A_4&=\frac{2c_mc_nx}{kR}\left(\frac{\partial\phi_{0m}}{\partial x}\right)\phi_{0n}\sin[k(L_m-L_n)]。\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

这里，分两种情况讨论：

(1) $n\neq m\pm2$。利用厄米高斯光束的正交性质以及厄米多项式的递推公式，可以得到(见附录1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(A_1+A_2+A_3+A_4)dx=0,\tag{22}$$

这样，从(20)式可得到叠加后光束截面的内能 $E_0^{(m,n)}$

$$\begin{aligned}E_0^{(m,n)}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{c_m^2\left[\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial\phi_{0m}}{\partial x}\right)^2+\phi_{0m}^2\frac{x^2}{R^2}\right]+c_n^2\left[\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial\phi_{0n}}{\partial x}\right)^2+\phi_{0n}^2\frac{x^2}{R^2}\right]\right\}dx\\ &=c_m^2E_0^{(m)}+c_n^2E_0^{(n)}=[c_m^2(2m+1)+c_n^2(2n+1)]\frac{1}{k^2\sigma_0^2}。\end{aligned}\tag{23}$$

从(23)式可知当 $n\neq m\pm2$，叠加后光束截面的内能等于叠加前两光束截面内能之和，均不含变数 z。说明叠加后的内能 $E_0^{(m,n)}$ 也是不变量。

(2) $n=m\pm2$。此时，Φ 可统一表示为：

$$\Phi=c_m\phi_m+c_{m-2}\phi_{m-2}。\tag{24}$$

与(22)式一样，可以证明了在这种情况下

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(A_1+A_2+A_3+A_4)dx=2c_mc_{m-2}\sqrt{m(m-1)}\frac{1}{k^2\sigma_0^2},\tag{25}$$

这样，内能

$$\begin{aligned}E_0^{(m,m-2)}&=E_0^{(m)}+E_0^{(m-2)}+2c_mc_{m-2}\sqrt{m(m-1)}\frac{1}{k^2\sigma_0^2}\\ &=[c_m^2(2m+1)+c_{m-2}^2(2m-3)+2c_mc_{m-2}\sqrt{m(m-1)}]\frac{1}{k^2\sigma_0^2}。\end{aligned}\tag{26}$$

注意到在这种情况下，内能仍不含变数 z，故也是不变量。

按照完全类似的推导，对于一个由 N 个一维厄米高斯光束叠加而成的光束，它的截面内能 E_0 等于：

$$\Phi=\sum_{m=0}^{N-1}c_m\phi_m, \tag{27}$$

$$E_0=\left[\sum_{m=0}^{N-1}c_m^2(2m+1)+\sum_{m=0}^{N-1}2c_mc_{m-2}\sqrt{m(m-1)}\right]\frac{1}{k^2\sigma_0^2}。 \tag{28}$$

线性叠加系数 c 的脚标为负时，取 0 值。上式右边第一项代表各阶厄米高斯光束内能的线性和，第二项代表各阶光束之间的偶合(干涉)所引起的内能的增加。

注意到整个内能表式均不含变数 z。即任意 N 个厄米高斯光束相叠加，它的截面内能同样是不变量。而由于厄米高斯光束的正交、完备性，任一傍轴光束均可展开为厄米高斯光束的线性和，从而断定：任意一个在真空中稳态传输的一维傍轴光束，在光轴任何位置的光束横截面的内能都是一样的，即内能在传输过程中是一个不变量。

以上结果很容易推广到两维傍轴光束。它的内部能量 E_0 可表示为：

$$\begin{aligned}\underset{(\text{两维})}{E_0}=&\left[\sum_{m'=0}^{N'-1}c_{m'}^2(2m'+1)+\sum_{m'=0}^{N'-1}2c_{m'}c_{m'-2}\sqrt{m'(m'-1)}\right]\frac{1}{k^2\sigma_0'^2}\\&+\left[\sum_{m=0}^{N-1}c_m^2(2m+1)+\sum_{m=0}^{N-1}2c_mc_{m-2}\sqrt{m(m-1)}\right]\frac{1}{k^2\sigma_0^2},\end{aligned} \tag{29}$$

其中，$c_{m'}$, σ_0' 分别代表另一维(含变数 y)的光腰半径和线性组合系数。显然，它也是不变量。

此外，附录还列出了轴对称拉盖尔高斯光束截面内能是不变量的证明。

三、傍轴光束截面内能不变量的几点应用

证明了傍轴光束截面的内能是一个不变量之后，就可用这个结论分析和描写光束传输的某些特性，今举几例如下：

(1) 傍轴光束惯性中心的(能)速度是一个不变量

一个傍轴光束的横截面，它的惯性中心[1]显然落在截面平面内，这时惯性中心的(能)速度 V_c 等于[1]

$$V_c=\sqrt{1-E_0}\,c, \tag{30}$$

E_0 是光束截面的内能，$\boldsymbol{V}_c$ 的方向平行于光轴。当这个截面的各部分以速度 $c\nabla L$ 沿着衍射光线运动。由于 ∇L 是空间坐标(x, y, z)的函数，因此，经过时间 t 之后的等时间曲面就不再是平面。但按傍轴条件，$(\partial L/\partial z)$，$(\partial\Phi_0/\partial z)$ 均为高级小量，在忽略这些小量的前提下，等时间曲面的内能应等于穿过曲面的横截面的内能。所以，向前运动的等时间曲面每时刻的内能均应保持恒值。也就是说，这个运动曲面的惯性中心以恒速 $\sqrt{1-E_0}c$ 沿光轴方向运动。

(2) 由傍轴光束的初始条件确定光束的远场发散度

给出一个有限宽度的傍轴光束截面的振幅分布和位相分布之后，按以往的方法，需要引用衍射积分才能算出光束的远场发散度。但按照文献 [4] 定义的光束发散度 δ 等于远场光束截面的横向能量，即

$$\delta=\int_s \phi_0^2 \sin^2 \gamma\, ds。\tag{31}$$

当$\int_s \phi_0^2 ds=1$，γ 是远场光束波矢与光轴之间的夹角，s 表示远场截面。同时考虑到有限宽度的光束在远场的内禀能量恒等于零。因此，按照(3)式，在远场的光束截面的内能即等于发散度 δ，而内能又是一个不变量，所以只要求出光束初始截面的内能，就是光束的远场发散度 δ，这比用衍射积分计算简便得多。

(3) 光束焦平面的规定

强激光束在介质传输过程中，由于存在自聚焦效应，傍轴强光束的振幅及位相均受到无规的调制。这类光束的焦平面，至今缺少一个清晰的定义。若从内能的观点来考察，当这类光束处于收敛传输过程中，内能保持不变，但光束截面的内部动能不断转化为内禀能量，当内禀能量达到极大值之后，光束则开始向前发散传输，这时内能仍保持不变，但内禀能量开始反过来转化为内部动能。因此，这类傍轴光束焦平面的一个合理定义应该是：在焦平面上，光束的内禀能量取极大值。

从以上三例可看出，傍轴光束截面的内能是一个不变量的论断是有实际意义的。

附　　录

计算轴对称的拉盖尔高斯光束截面的内能。一个 m-n 阶拉盖尔高斯光束的场可表示为：

$$\phi_{mn}=\phi_{0mn}e^{ikl_{mn}},\tag{A-1}$$

其中

$$\phi_{0mn}=a_{mn}\frac{e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}}{\sigma}\left(\frac{2r^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{m}{2}}L_n^m\left(\frac{2r^2}{\sigma^2}\right)\cdot\cos m\theta,$$

$$l_{mn}=z+\frac{r^2}{2R}+\frac{1}{k}(m+2n+1)\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{k\sigma_0^2}{2z}\right),$$

归一化系数

$$a_{mn}=\sqrt{\frac{4n!}{\pi(m+n)!}}$$

L_n^m 为缔合拉盖尔多项式。

用新变量 u 代换圆柱坐标变数 r，令：

$$u=\frac{2r^2}{\sigma^2},\tag{A-2}$$

则有

$$\phi_{0mn}=\frac{a_{mn}}{\sigma}e^{-\frac{u}{2}}u^{\frac{m}{2}}L_n^m(u)\cos m\theta。\tag{A-3}$$

在计算内禀能量及内部动能时用到以下一些关系式：

(a) $\int_0^\infty e^{-u}u^m L_n^m(u)L_{n'}^{m}(u)\,du=\frac{(m+n)!}{n!}\delta_{n,n'}$,

(b) $\int_0^{2\pi}\cos^2 m\theta\, d\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2 m\theta\, d\theta=\pi$,

(c) $\frac{d}{du}L_n^m(u)=-L_{n-1}^{m+1}$,

(d) $uL_n^m=(m+2n+1)L_n^m-(n+1)L_{n+1}^m-(m+n)L_{n-1}^m$,

(e) $L_n^m=L_n^{m-1}+L_{n-1}^{m-1}+\cdots+L_0^{m-1}$,

(f) $\int_0^\infty u^\lambda e^{-u}L_n^m L_{n'}^{m'}du=(-1)^{n+n'}\Gamma_{(\lambda+1)}\sum_k^{nn'}\binom{\lambda-m}{n-k}\binom{\lambda-m'}{n'-k}\binom{\lambda+k}{k}$,

(g) $\sum_{k=0}^{j}\binom{n+k}{n}=\binom{n+j+1}{n+1}$。

利用这些关系式计算内禀能量

$$\iint\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_{0mn})^2ds=\iint\frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{\partial\phi_{0mn}}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_{0mn}}{\partial\theta}\right)^2\right]ds$$

$$=\frac{1}{4k^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left[8u\left(\frac{\partial\phi_{0mn}}{\partial u}\right)^2+\frac{2}{u}\left(\frac{\partial\phi_{0mn}}{\partial\theta}\right)^2\right]du\,d\theta$$

$$=\frac{2a_{mn}^2}{k^2\sigma^2}\pi\int_0^{\infty}\Big[\frac{1}{4}e^{-u}u^{m+1}(L_n^m)^2+\frac{m^2}{4}e^{-u}u^{m-1}(L_n^m)^2+e^{-u}u^{m+1}(L_{n-1}^{m+1})^2$$

$$-\frac{m}{2}e^{-u}u^m(L_n^m)^2+e^{-u}u^{m+1}L_n^mL_{n-1}^{m+1}-me^{-u}u^mL_n^mL_{n-1}^{m+1}+\frac{m^2}{4}e^{-u}u^{m-1}(L_n^m)^2\Big]du$$

$$=\frac{2\pi}{k^2\sigma^2}\frac{4n!}{\pi(m+n)!}\left[\frac{1}{4}(m+2n+1)\frac{(m+n)!}{n!}+\frac{m}{2}\frac{(m+n)!}{n!}-\frac{m}{2}\frac{(m+n)!}{n!}\right]$$

$$=\frac{2(m+2n+1)}{k^2\sigma^2}。\tag{A-4}$$

计算内部动能

$$\iint\phi_{0mn}^2(\nabla l_{mn})_\perp^2ds=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\phi_{0mn}^2\left(\frac{r}{R}\right)^2\frac{\sigma^2}{4}du\,d\theta=\frac{a_{mn}^2\sigma^2}{8R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-u}u^m(L_n^m)^2(\cos^2m\theta)u\,du\,d\theta$$

$$=\frac{\sigma^2}{8R^2}\frac{4n!}{\pi(m+n)!}[\pi(m+2n+1)]\frac{(m+n)!}{n!}=\frac{\sigma^2}{2R^2}(m+2n+1)。\tag{A-5}$$

(A-4), (A-5) 两式相加得出内能:

$$E_J^{(mn)}=2(m+2n+1)\left(\frac{1}{k^2\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{4R^2}\right)=\frac{2(m+2n+1)}{k^2\sigma_0^2}。\tag{A-6}$$

结果只含参数 m, n, k, σ_0, 不含 z。所以两维的拉盖尔高斯光束截面的内能也是不变量。

参 考 文 献

[1] 邓锡铭、方洪烈:《激光》,1980, **7**, No. 2 (Feb), 14.
[2] 邓锡铭、方洪烈:《激光》,1979, **6**, No. 11 (Nov), 1.
[3] 邓锡铭、林伟平、方洪烈:《光学学报》,1981, **1**, No. 5 (Sep), 385.
[4] 邓锡铭、方洪烈、黄镇江、林伟平:《激光》,1981, **8**, No. 12 (Dec), 1.

On the invariable property of internal energy of paraxial beam cross-section

DENG XIMING AND CHEN ZHEZUN
(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanisc, Academia Sinica*)

(Received 29 January 1983)

Abstract

A physical concept called internal energy have been set up from the hydrodynamic model describing the light beam transmission[1]. In this paper authors expect to demonstrate that for any stable paraxial light beam transmitting in vacuum, the internal energy of the light beam is not dependent on the position of the beam cross-section. In other words, in the cause of transmitting, the internal energy is a constant.